

Plaquette 2 – Produit scalaire en coordonnées et orthogonalité

Produit scalaire — Première STI2D

Exercices

Méthode

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire se calcule en une ligne : $xx' + yy'$. Ce nombre unique répond à une question géométrique redoutablement utile — **les deux vecteurs sont-ils perpendiculaires ?**

Exercice 1 – Un premier calcul

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Avec des coordonnées négatives

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Tester l'orthogonalité

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 4 – Deux vecteurs perpendiculaires

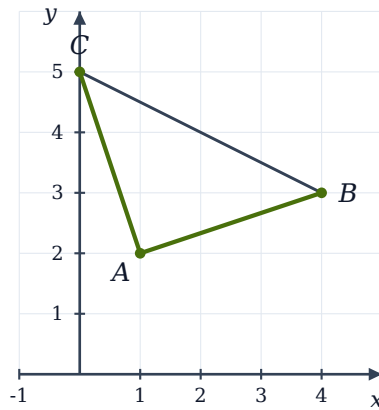
Montrer que $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, puis calculer leurs normes.

Exercice 5 – Trouver une coordonnée manquante

Déterminer y pour que $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix}$ soit orthogonal à $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 – Un angle droit dans un triangle

On donne $A(1 ; 2)$, $B(4 ; 3)$ et $C(0 ; 5)$. Le triangle ABC est-il rectangle en A ?



Le triangle ABC dans un repère orthonormé

Exercice 7 – Norme et produit scalaire d'un vecteur par lui-même

Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$, calculer $\|\vec{u}\|$ puis $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

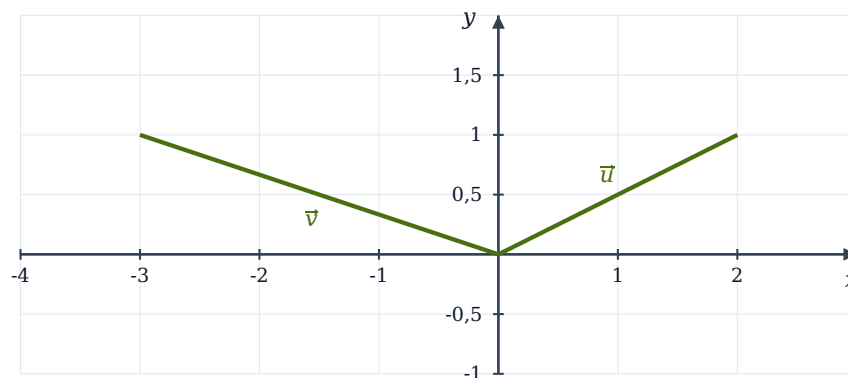
Exercice 8 – Utiliser la distributivité

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ de deux façons.

Exercice 9 – Lire le signe

Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer le produit scalaire et en déduire la nature de l'angle.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ tracés depuis l'origine

Exercice 10 – Construire un vecteur orthogonal

Donner deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, dont un de norme différente.

Exercice 11 – Des vecteurs colinéaires

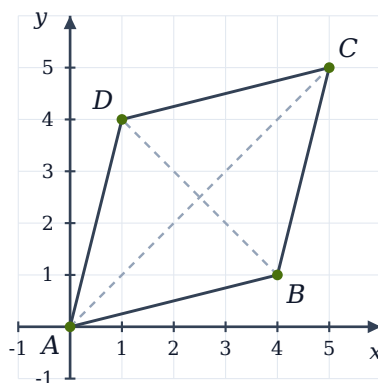
On donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

- Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Calculer $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ et comparer.

Exercice 12 – Un losange

On donne $A(0; 0)$, $B(4; 1)$, $C(5; 5)$ et $D(1; 4)$.

- Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- Montrer que ses diagonales sont perpendiculaires et conclure.

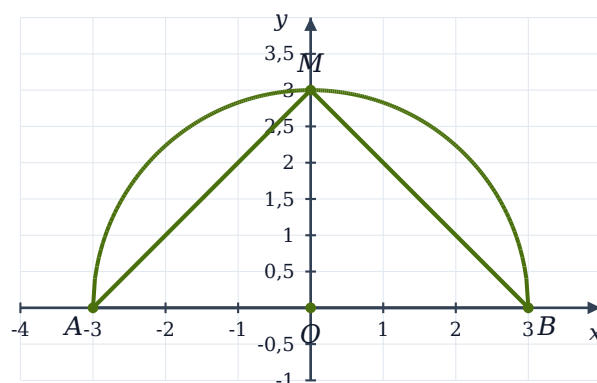


Le quadrilatère ABCD et ses diagonales

Exercice 13 – Un point sur un cercle

On donne $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ et $M(0; 3)$.

Montrer que le triangle AMB est rectangle en M .



M sur le demi-cercle de diamètre [AB]

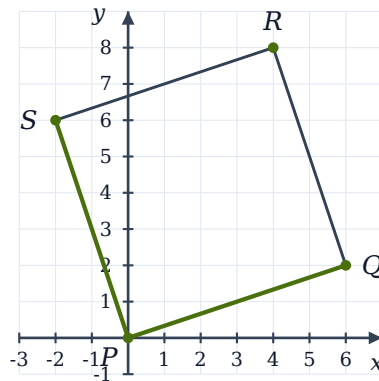
Exercice 14 – Deux calculs à ne pas confondre

Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Exercice 15 – Une plaque rectangulaire

Une plaque a pour sommets $P(0; 0)$, $Q(6; 2)$, $R(4; 8)$ et $S(-2; 6)$.

Vérifier que les angles en P et en Q sont droits.

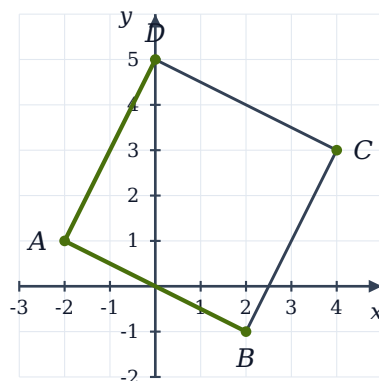


La plaque PQRS

Exercice 16 – Synthèse : la nature d'un quadrilatère

On donne $A(-2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$ et $D(0; 5)$.

- Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et conclure sur les angles.
- Calculer AB et AD .
- Donner la nature exacte de $ABCD$ et son aire.



Le quadrilatère ABCD