

MATHÉMATIQUES

Produit scalaire

Première STI2D

Produit scalaire • Norme • Angle • Projection orthogonale • Orthogonalité
Base orthonormée • Coordonnées • Al-Kashi • Travail d'une force

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe de première STI2D** (BO spécial n°8 du 25 juillet 2019), partie mathématiques, « Produit scalaire ». Il couvre :

- définition $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$; projection orthogonale ;
- symétrie, bilinéarité, carré scalaire ; caractérisation de l'orthogonalité ;
- expression en base orthonormée $xx' + yy'$; norme ;
- théorème d'Al-Kashi et égalité du parallélogramme ; calcul de longueurs et d'angles ; travail d'une force.

Objectif : calculer un produit scalaire par la définition, par projection ou en coordonnées, et l'utiliser pour obtenir des longueurs, des angles et le travail d'une force.

Document pédagogique – mathlvl.fr

Table des matières

1	Définition	3
2	Projection orthogonale	3
3	Propriétés et orthogonalité	4
4	En base orthonormée	4
5	Longueurs et angles dans un triangle	4
6	Travail d'une force	5
7	Erreurs classiques	5
8	Fiche de synthèse	5
9	Exercices d'application	6
10	Corrigés des exercices	6

1. Définition

Produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls formant un angle géométrique θ . Leur **produit scalaire** est le **nombre réel**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$. Avec $\theta = \frac{2\pi}{3}$, on obtiendrait -6 : le produit scalaire est négatif quand l'angle est obtus.

Carré scalaire

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (angle nul). On le note aussi $\vec{u}^2$.

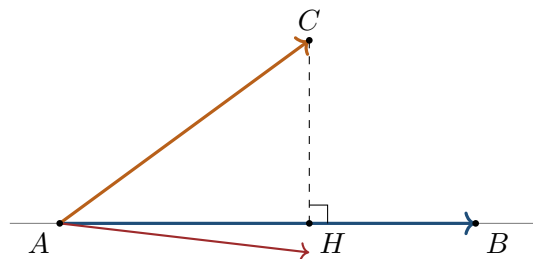
2. Projection orthogonale

Calcul par projection

Soit A, B, C trois points avec $A \neq B$, et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

qui vaut $AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, et $-AB \times AH$ sinon.



Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ne dépend que de la projection $\overrightarrow{AH}$ de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) .

$ABCD$ est un carré de côté 4 et I le milieu de $[BC]$. Le projeté de I sur (AB) est B , donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = AB \times AB = 16$.

3. Propriétés et orthogonalité

Règles de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

- symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- bilinéarité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- identités : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Orthogonalité

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur).

4. En base orthonormée

Expression analytique

Dans une base orthonormée, si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Calculer un angle

$\vec{u}(2; 1)$ et $\vec{v}(1; 3)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 3 = 5$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$. Donc $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Prouver une orthogonalité

On calcule $xx' + yy'$: s'il est nul, les vecteurs (et les droites qu'ils dirigent) sont perpendiculaires.
Exemple : $\vec{u}(4; -2)$ et $\vec{v}(1; 2)$, $4 - 4 = 0$.

5. Longueurs et angles dans un triangle

Théorème d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC , avec $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Si $\hat{A}$ est droit, on retrouve le théorème de Pythagore.

Démonstration. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $BC^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

- Longueur : $b = 5$, $c = 8$ et $\hat{A} = 60^\circ$: $a^2 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 49$, donc $a = 7$.
- Angle : un triangle de côtés 4, 5 et 6. L'angle opposé au côté 6 vérifie $\cos \theta = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{5}{40} = 0,125$, d'où $\theta \approx 82,8^\circ$.

Égalité du parallélogramme

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$: dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des quatre côtés.

6. Travail d'une force

Travail

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ lors d'un déplacement rectiligne de A à B est

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos \theta \quad (\text{en joules, avec } F \text{ en newtons et } AB \text{ en mètres}).$$

Une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas.

Tirer un chariot

On tire un chariot sur 20 m avec une force de 50 N inclinée de 30° sur l'horizontale : $W = 50 \times 20 \times \cos 30^\circ = 1\,000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 866$ J. Le poids, vertical, ne travaille pas lors du déplacement horizontal.

7. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier que le produit scalaire est un nombre, pas un vecteur.
- Oublier le cosinus, ou prendre l'angle entre les droites au lieu de l'angle entre les vecteurs.
- Oublier le signe moins quand le projeté est « de l'autre côté » de A .
- Utiliser $xx' + yy'$ dans une base qui n'est pas orthonormée.

8. Fiche de synthèse

Définition	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta$; $\vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2$
Projection	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ (H projeté de C sur (AB))
Coordonnées	$xx' + yy'$; $\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2}$ (base orthonormée)
Orthogonalité	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
Al-Kashi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
Travail	$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos \theta$

9. Exercices d'application

Exercice 1 – Définition

$\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesure $\frac{2\pi}{3}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 2 – Coordonnées

Dans une base orthonormée, $\vec{u}(4; -2)$, $\vec{v}(1; 2)$ et $\vec{w}(3; 1)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$. Que dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Exercice 3 – Al-Kashi

Dans un triangle ABC , $AB = 6$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Calculer BC .

Exercice 4 – Travail

Une force de 200 N déplace une charge de 15 m. Calculer le travail si la force fait un angle de 60° avec le déplacement, puis si elle lui est perpendiculaire.

10. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 5 \times \cos \frac{2\pi}{3} = 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -5.$

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 4 = 0$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 12 - 2 = 10.$

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $BC^2 = 36 + 16 - 2 \times 6 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 52 + 24 = 76$, donc $BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \approx 8,72.$

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $W = 200 \times 15 \times \cos 60^\circ = 1\,500$ J. Perpendiculaire : $\cos 90^\circ = 0$, $W = 0$ J.