

## Plaquette 1 - Arbres, épreuves de Bernoulli et comptage des chemins

### Répétition d'épreuves indépendantes — Première STI2D

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Méthodes du cours.

- Une **épreuve de Bernoulli** a deux issues : le succès  $S$ , de probabilité  $p$ , et l'échec  $\overline{S}$ , de probabilité  $1 - p$ .
- **Répétition indépendante** : chaque épreuve se déroule dans les mêmes conditions, le résultat d'une épreuve n'influence pas les autres.
- Dans l'arbre : la probabilité d'un **chemin** est le **produit** des probabilités rencontrées ; la probabilité d'un **événement** est la **somme** des probabilités des chemins qui le réalisent.
- Nombre de chemins d'un arbre à  $n$  épreuves :  $2^n$  (2, 4, 8 ou 16 chemins pour  $n = 1$  à 4).
- Nombre de chemins réalisant exactement  $k$  succès (comptage direct sur l'arbre) :
  - pour  $n = 2$  : 1, 2, 1 chemins (pour  $k = 0, 1, 2$ ) ;
  - pour  $n = 3$  : 1, 3, 3, 1 ;
  - pour  $n = 4$  : 1, 4, 6, 4, 1.
- « Au moins un succès » : on passe par l'**événement contraire**, « aucun succès », qui n'a qu'un seul chemin :

$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n$$

- Contrôle : la somme des probabilités de tous les chemins vaut toujours 1.

#### Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une épreuve de Bernoulli

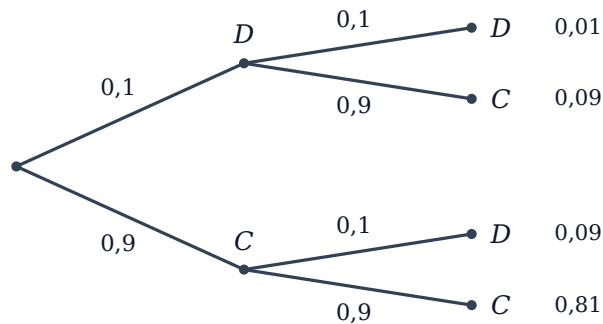
Une épreuve de Bernoulli n'a que **deux** issues.

- Oui** : deux issues, « défectueuse » (succès si c'est ce que l'on observe) de probabilité  $p = 0,03$ , et « conforme ».
- Non** : il y a six issues possibles.
- Oui** : on ne retient que deux issues, « obtenir 6 » de probabilité  $p = \frac{1}{6}$ , et « ne pas obtenir 6 ».

**Réponse.** a) oui,  $p = 0,03$  · b) non (six issues) · c) oui,  $p = \frac{1}{6}$ .

## Correction de l'exercice 2 - Deux épreuves : arbre complet

L'arbre des deux prélèvements, avec la probabilité de chaque chemin :



*Deux prélèvements indépendants (D : défectueuse)*

À chaque épreuve :  $P(D) = 0,1$  et  $P(C) = 0,9$ . On multiplie le long de chaque chemin.

- $DD : 0,1 \times 0,1 = 0,01$  ;
- $DC : 0,1 \times 0,9 = 0,09$  ;
- $CD : 0,9 \times 0,1 = 0,09$  ;
- $CC : 0,9 \times 0,9 = 0,81$ .

b) Somme :  $0,01 + 0,09 + 0,09 + 0,81 = 1$ . L'arbre est complet.

**Piège.** Les chemins  $DC$  et  $CD$  sont **différents** (l'ordre compte) mais ont la même probabilité.

**Réponse.** 0,01 ; 0,09 ; 0,09 ; 0,81 ; somme = 1.

## Correction de l'exercice 3 - Exactement un succès

Deux chemins réalisent cet événement :  $DC$  et  $CD$ .

- On additionne leurs probabilités :

$$P(\text{exactement un défaut}) = 0,09 + 0,09 = 0,18$$

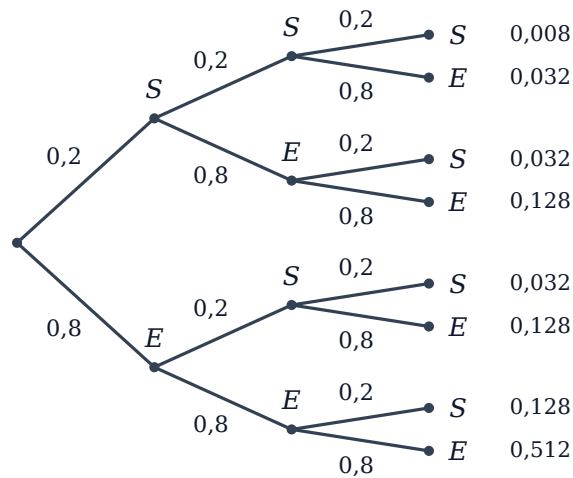
- Soit 18%.

**Piège.** Il ne faut pas oublier le second chemin : répondre 0,09 est l'erreur la plus fréquente.

**Réponse.** 0,18.

## Correction de l'exercice 4 - Trois épreuves

L'arbre des trois épreuves :



Trois épreuves,  $p = 0,2$

- a) Chaque épreuve donne 2 possibilités, donc  $2^3 = 8$  chemins.  
 b) Un seul chemin donne trois succès :  $0,2^3 = 0,008$ .  
 c) **Trois** chemins donnent exactement un succès (le succès peut être à la 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> épreuve), chacun de probabilité  $0,2 \times 0,8 \times 0,8 = 0,128$ .

$$P(\text{exactement 1 succès}) = 3 \times 0,128 = 0,384$$

**Réponse.** a) 8 chemins · b) 0,008 · c) 0,384.

## Correction de l'exercice 5 - Au moins un succès

On passe par l'événement contraire, « aucune panne », qui ne correspond qu'à **un seul** chemin.

- $P(\text{aucune panne}) = 0,85^4$ .
- $0,85^4 \approx 0,522\,006$ .

$$P(\text{au moins une panne}) = 1 - 0,522\,006 \approx 0,478$$

- Soit environ 47,8 % : avec quatre composants, le risque d'avoir au moins une panne est presque d'une chance sur deux, alors que chaque composant n'a que 15 % de risque.

**Réponse.**  $\approx 0,478$ .

## Correction de l'exercice 6 - Quatre épreuves : comptage des chemins

- a)  $2^4 = 16$  chemins.  
 b) On les énumère en notant S (succès) et E (échec) : *SSEE, SESE, SEES, ESSE, ESES, EESS*. Il y a 6 chemins.  
 c) Chaque chemin a la même probabilité  $0,5^4 = 0,0625$ , donc

$$P(\text{exactement 2 succès}) = 6 \times 0,0625 = 0,375$$

- Contrôle : les nombres de chemins pour 0, 1, 2, 3, 4 succès sont 1, 4, 6, 4, 1, et  $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ . Cohérent.

**Réponse.** a) 16 · b) 6 chemins · c) 0,375.

### Correction de l'exercice 7 - Loi complète sur trois épreuves

Nombre de chemins : 1, 3, 3, 1 pour 0, 1, 2, 3 succès.

- 0 succès :  $1 \times 0,6^3 = 0,216$ .
- 1 succès :  $3 \times 0,4 \times 0,6^2 = 3 \times 0,4 \times 0,36 = 0,432$ .
- 2 succès :  $3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 3 \times 0,16 \times 0,6 = 0,288$ .
- 3 succès :  $1 \times 0,4^3 = 0,064$ .
- Somme :  $0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1$ . La loi est complète.
- Remarque : la valeur la plus probable est 1 succès, ce qui est cohérent avec  $3 \times 0,4 = 1,2$  succès attendus en moyenne.

**Réponse.** 0,216 ; 0,432 ; 0,288 ; 0,064 (somme = 1).

### Correction de l'exercice 8 - Au plus un succès

« Au plus un » signifie 0 succès **ou** 1 succès : on additionne les deux cas.

- 0 succès : 1 chemin,  $0,9^4 = 0,6561$ .
- 1 succès : 4 chemins,  $4 \times 0,1 \times 0,9^3 = 4 \times 0,1 \times 0,729 = 0,2916$ .
- Total :  $0,6561 + 0,2916 = 0,9477 \approx 0,948$ .
- Interprétation : dans près de 95 % des cas, on obtient au plus un succès sur quatre essais.

**Réponse.**  $\approx 0,948$ .

### Correction de l'exercice 9 - Problème : contrôle de quatre pièces

À chaque prélèvement,  $p = 0,08$  et  $1 - p = 0,92$ .

- a) Un seul chemin :  $0,92^4 \approx 0,716393$ , soit environ 0,716.
- b) 4 chemins :  $4 \times 0,08 \times 0,92^3 = 4 \times 0,08 \times 0,778688 \approx 0,249$ .
- c) « Au moins deux » est le contraire de « au plus une » :  
$$P(\text{refus}) = 1 - (0,716 + 0,249) = 1 - 0,965 = 0,035$$

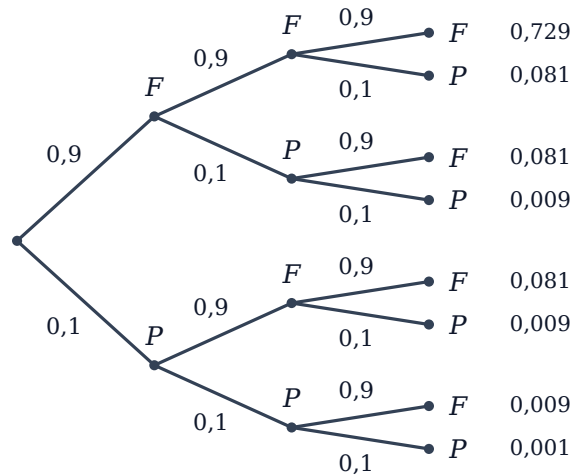
- Environ 3,5 % des lots sont refusés par ce contrôle.

**Réponse.** a)  $\approx 0,716$  · b)  $\approx 0,249$  · c)  $\approx 0,035$ .

### Correction de l'exercice 10 - Problème : redondance d'un système

Un « succès » est ici un capteur qui fonctionne, avec  $p = 0,9$ .

**L'arbre** des trois capteurs ; on retient les chemins comportant au moins deux  $F$  :



$F$  : le capteur fonctionne ( $p = 0,9$ )

- 3 capteurs fonctionnent (1 chemin) :  $0,9^3 = 0,729$ .
- Exactement 2 fonctionnent (3 chemins) :  $3 \times 0,9^2 \times 0,1 = 3 \times 0,81 \times 0,1 = 0,243$ .
- Le système fonctionne dans les deux cas, on additionne :

$$P(\text{système OK}) = 0,729 + 0,243 = 0,972$$

- Soit 97,2 %, contre 90 % pour un capteur seul : c'est l'intérêt de la **redondance** avec vote majoritaire.

**Réponse.** 0,972.

### Correction de l'exercice 11 - Lire un arbre de deux tirs

Chaque tir est une épreuve de Bernoulli de succès  $A$ , avec  $p = 0,7$  ; les tirs sont indépendants, donc les branches sont les mêmes au second niveau.

- a) Chemin  $AA$  :  $0,7 \times 0,7 = 0,49$ .
- b) Deux chemins conviennent,  $A\bar{A}$  et  $\bar{A}A$  :

$$P = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 = 0,21 + 0,21 = 0,42$$

- c) **Par les chemins** :  $0,49 + 0,42 = 0,91$ .

**Par le contraire** : « au moins un » est le contraire de « aucun », le chemin  $\bar{A}\bar{A}$  :

$$P = 1 - 0,3^2 = 1 - 0,09 = 0,91$$

**Réponse.** a) 0,49 — b) 0,42 — c) 0,91.

### Correction de l'exercice 12 - Quatre lancers d'une pièce truquée

Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès « pile », avec  $p = 0,6$  ; les lancers sont indépendants.

- a) L'arbre compte  $2^4 = 16$  chemins. Les nombres de chemins selon le nombre de piles sont 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1 : 6 chemins comportent exactement 2 piles.
- b) Un chemin à  $k$  piles a pour probabilité  $0,6^k \times 0,4^{4-k}$  ; on le multiplie par le nombre de chemins :

| Piles       | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Probabilité | 0,0256 | 0,1536 | 0,3456 | 0,3456 | 0,1296 |

Par exemple  $P(2) = 6 \times 0,6^2 \times 0,4^2 = 6 \times 0,36 \times 0,16 = 0,3456$ .

**Contrôle.**  $0,0256 + 0,1536 + 0,3456 + 0,3456 + 0,1296 = 1$ .

c) 2 et 3 piles sont à égalité (0,3456) : ce sont les résultats les plus probables.

**Réponse.** a) 16 et 6 — b) 0,0256 ; 0,1536 ; 0,3456 ; 0,3456 ; 0,1296 — c) 2 ou 3 piles.

### Correction de l'exercice 13 - Avec ou sans remise : est-ce une répétition ?

{{figure}}

a) **Avec remise**, l'urne est la même à chaque tirage : les deux épreuves sont identiques ( $p = \frac{3}{5}$ ) et indépendantes. C'est bien une répétition d'épreuves de Bernoulli.

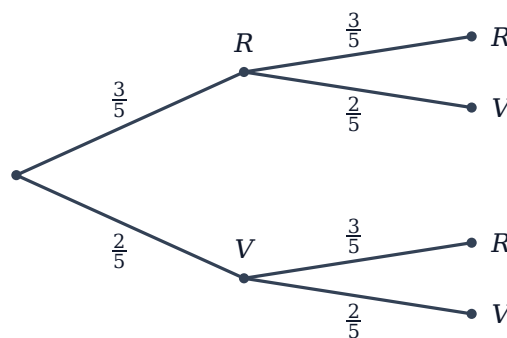
$$P(RR) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0,36$$

b) **Sans remise**, la composition de l'urne change après le premier tirage : la probabilité de rouge au second tirage vaut  $\frac{2}{4}$  ou  $\frac{3}{4}$  selon le premier. Les épreuves ne sont **pas** indépendantes : ce n'est pas une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques.

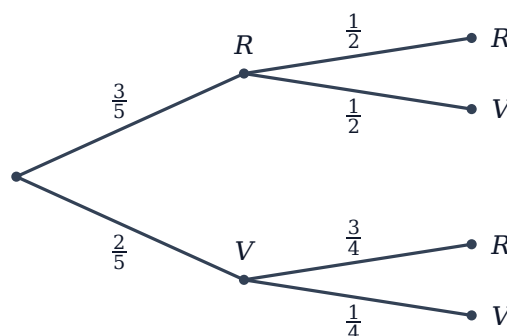
$$P(RR) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0,3$$

Les arbres le montrent : avec remise, les branches du second niveau sont identiques ; sans remise, elles diffèrent.

**Réponse.** a) oui,  $\frac{9}{25} = 0,36$  — b) non, 0,3.



Avec remise



Sans remise

### Correction de l'exercice 14 - Au moins deux sur trois

Chaque réglage est une épreuve de Bernoulli avec  $p = 0,3$  ; sur trois épreuves, les nombres de chemins selon le nombre de réussites sont 1 ; 3 ; 3 ; 1.

a) Exactement deux réussites : 3 chemins ( $RRE, RER, ERR$ ), chacun de probabilité  $0,3^2 \times 0,7$ .

$$P = 3 \times 0,09 \times 0,7 = 0,189$$

b) Au moins deux : deux réussites ou trois réussites ( $0,3^3 = 0,027$ ).

$$P = 0,189 + 0,027 = 0,216$$

c) « Au plus une » est le contraire de « au moins deux » :  $1 - 0,216 = 0,784$ .

**Réponse.** a) 0,189 — b) 0,216 — c) 0,784.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : deux stratégies de tirage

Ici  $p = 0,5$  et chaque chemin a la probabilité  $0,5^4 = 0,0625$ . Les nombres de chemins sont 1, 4, 6, 4, 1 pour 0 à 4 succès.

a) « Au moins trois faces » : 3 faces (4 chemins) ou 4 faces (1 chemin), soit 5 chemins.

$$P = 5 \times 0,0625 = 0,3125$$

b) « Au moins deux faces » :  $6 + 4 + 1 = 11$  chemins, donc  $P = 11 \times 0,0625 = 0,6875$ .

c) La seconde règle est beaucoup plus favorable au joueur (68,75 % contre 31,25 %).

— Contrôle : « au moins deux » est le contraire de « au plus un », soit

$$1 - (1 + 4) \times 0,0625 = 1 - 0,3125 = 0,6875. \text{ Cohérent.}$$

**Réponse.** a) 0,3125 · b) 0,6875 · c) la seconde règle double presque les chances.