

Plaquette 4 – Au moins un, au plus un : le passage au contraire

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traduire l'énoncé.

Formulation	Valeurs concernées (sur 4 épreuves)
exactement 2	2
au moins 2	2 ; 3 ; 4
au plus 2	0 ; 1 ; 2
au moins un	1 ; 2 ; 3 ; 4

Les contraires.

Événement	Son contraire
au moins un	aucun
au plus un	au moins deux
au moins deux	au plus un
tous	au moins un échec

Les deux formules rapides.

$$P(\text{aucun}) = (1 - p)^n \quad P(\text{au moins un}) = 1 - (1 - p)^n$$

Choisir le nombre d'épreuves. On teste les puissances successives jusqu'à franchir le seuil demandé.

Contrôle. La somme des probabilités des cinq valeurs possibles vaut 1 pour $n = 4$.

⚠ « Au plus un » comprend le cas **zéro** : l'oublier fausse tout le calcul.

Correction de l'exercice 1 – Traduire une formulation

Sur quatre épreuves, le nombre de succès vaut 0, 1, 2, 3 ou 4.

- a) « Au moins trois » : 3 ou 4 succès.
- b) « Au plus deux » : 0, 1 ou 2 succès.
- c) « Plus d'un » : strictement plus qu'un, donc 2, 3 ou 4 succès (c'est la même chose que « au moins deux »).

Repère. « Au moins k » inclut k ; « plus de k » ne l'inclut pas.

Réponse. a) 3 ; 4 — b) 0 ; 1 ; 2 — c) 2 ; 3 ; 4.

Correction de l'exercice 2 – Au moins un, quatre fois

Chaque cycle donne un dérèglement avec la probabilité 0,2, indépendamment.

- a) Par le contraire, « aucun dérèglement » :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - 0,8^4 = 1 - 0,4096 = 0,5904$$

- b) Par la somme directe des cas 1 à 4 (lignes 4 ; 6 ; 4 ; 1) :

— un : $4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096$; deux : $6 \times 0,2^2 \times 0,8^2 = 0,1536$;

— trois : $4 \times 0,2^3 \times 0,8 = 0,0256$; quatre : $0,2^4 = 0,0016$.

Total : $0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 0,5904$. Le contraire donne le même résultat en un seul calcul.

Réponse. a) 0,5904 — b) même résultat.

Correction de l'exercice 3 - Au plus un

Avec $p = 0,2$ et quatre cycles.

a) « Au plus un » : zéro ou un dérèglement.

$$P = 0,8^4 + 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192$$

b) « Au moins deux » est le contraire de « au plus un » : $1 - 0,8192 = 0,1808$.

Piège. « Au plus un » inclut le cas zéro : oublier $0,8^4$ donnerait 0,4096, une valeur fausse.

Réponse. a) 0,8192 — b) 0,1808.

Correction de l'exercice 4 - Choisir le nombre de prélèvements

Avec n pièces prélevées, la probabilité d'en trouver au moins une défectueuse vaut $1 - 0,8^n$. On veut

$$1 - 0,8^n > 0,5 \Leftrightarrow 0,8^n < 0,5$$

On teste les puissances successives :

$$0,8^3 = 0,512 \quad 0,8^4 = 0,4096$$

Il faut prélever 4 **pièces** (avec 3 pièces, la probabilité vaut 0,488, juste en dessous de 0,5).

Réponse. 4 pièces.

Correction de l'exercice 5 - Un seuil plus exigeant

Sur n cycles, la probabilité d'au moins une panne vaut $1 - 0,9^n$. On veut $1 - 0,9^n > 0,25$, soit $0,9^n < 0,75$:

$$0,9^2 = 0,81 \quad 0,9^3 = 0,729$$

Il faut 3 **cycles** : la probabilité d'au moins une panne vaut alors $1 - 0,729 = 0,271 > 0,25$.

Réponse. 3 cycles.

Correction de l'exercice 6 - Tous les essais réussis

Chaque essai réussit avec la probabilité 0,7, indépendamment.

a) Les quatre réussissent : un seul chemin.

$$P = 0,7^4 = 0,2401$$

b) « Au moins un échec » est le contraire de « tous réussissent » : $1 - 0,2401 = 0,7599$.

Lecture. Même avec 70 % de réussite par essai, réussir quatre fois de suite n'arrive qu'une fois sur quatre environ.

Réponse. a) 0,2401 — b) 0,7599.

Correction de l'exercice 7 - Exactement, au moins, au plus

Avec $p = \frac{1}{2}$, chacun des 16 chemins vaut $\frac{1}{16}$; on compte les chemins (ligne 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1).

a) Exactement deux : $\frac{6}{16} = 0,375$.

b) Au moins deux (2, 3 ou 4 succès) : $\frac{6+4+1}{16} = \frac{11}{16} = 0,6875$.

c) Au plus deux (0, 1 ou 2 succès) : $\frac{1+4+6}{16} = \frac{11}{16} = 0,6875$.

Remarque. b) et c) sont égaux par symétrie de la loi quand $p = \frac{1}{2}$.

Réponse. a) 0,375 — b) 0,6875 — c) 0,6875.

Correction de l'exercice 8 - Un contraire mal choisi

L'erreur. Le contraire de « au moins deux succès » n'est pas « deux succès » : c'est « **au plus un succès** », c'est-à-dire zéro ou un.

La bonne écriture.

$$P(\text{au moins deux}) = 1 - P(\text{au plus un}) = 1 - P(0) - P(1)$$

En écrivant $1 - P(\text{deux succès})$, l'élève calcule la probabilité d'obtenir 0, 1, 3 ou 4 succès, ce qui n'a rien à voir.

Méthode. Lister les valeurs de l'événement (2 ; 3 ; 4), puis prendre les valeurs restantes (0 ; 1) pour le contraire.

Réponse. $P(\text{au moins deux}) = 1 - P(0) - P(1)$.

Correction de l'exercice 9 - Deux montages comparés

Chaque capteur marche avec la probabilité 0,9, indépendamment.

— **Montage A** (au moins deux sur trois) : $0,9^3 + 3 \times 0,9^2 \times 0,1 = 0,729 + 0,243 = 0,972$.

— **Montage B** (au moins trois sur quatre) :
 $0,9^4 + 4 \times 0,9^3 \times 0,1 = 0,6561 + 0,2916 = 0,9477$.

Le **montage A** est le plus fiable : il tolère une panne sur trois capteurs, alors que B, avec un capteur de plus, ne tolère toujours qu'une panne et a donc plus d'occasions d'en subir deux.

Réponse. Le montage A (0,972 contre 0,9477).

Correction de l'exercice 10 - Au moins un sur deux lignes

Les quatre pièces sont indépendantes. Aucun défaut signifie : les deux pièces de la première ligne conformes (0,9 chacune) **et** les deux de la seconde conformes (0,8 chacune).

$$P(\text{aucun défaut}) = 0,9^2 \times 0,8^2 = 0,81 \times 0,64 = 0,5184$$

Remarque. Ce n'est pas une répétition d'une même épreuve (les deux lignes n'ont pas le même taux), mais l'indépendance permet toujours de multiplier.

Réponse. 0,5184.

Correction de l'exercice 11 - Lire un résultat de simulation

Estimation de p . La fréquence de « zéro succès » est $\frac{4102}{10\,000} = 0,4102$, qui doit être proche de $(1 - p)^4$. On essaie $p = 0,2 : 0,8^4 = 0,4096$, très proche. On estime $p \approx 0,2$.

Comparaison au modèle. Avec $p = 0,2$, les effectifs attendus sur 10 000 séries sont

Succès	0	1	2	3	4
Modèle	4096	4096	1536	256	16
Simulation	4102	4085	1541	256	16

Les écarts sont très faibles (quelques unités sur plusieurs milliers) : la simulation est conforme au modèle.

Réponse. $p \approx 0,2$; la simulation est conforme au modèle.

Correction de l'exercice 12 - Deux pannes tolérées

Chaque module est en état avec la probabilité 0,8, indépendamment. Le système fonctionne s'il reste au moins deux modules en état ; il tombe en panne s'il en reste zéro ou un.

— Aucun module en état : $0,2^4 = 0,0016$.

— Exactement un : $4 \times 0,8 \times 0,2^3 = 0,0256$.

$$P(\text{fonctionne}) = 1 - (0,0016 + 0,0256) = 0,9728$$

Réponse. 0,9728.

Correction de l'exercice 13 - Un écart de vocabulaire

Avec $p = 0,3$ sur quatre épreuves :

— « Au moins un succès » (1, 2, 3 ou 4) : $1 - 0,7^4 = 1 - 0,2401 = 0,7599$.

— « Plus d'un succès » (2, 3 ou 4) :

$$1 - 0,7^4 - 4 \times 0,3 \times 0,7^3 = 1 - 0,2401 - 0,4116 = 0,3483.$$

La différence, $0,7599 - 0,3483 = 0,4116$, est exactement la probabilité d'obtenir **un seul** succès : c'est le cas qui sépare les deux formulations.

Réponse. 0,7599 et 0,3483.

Correction de l'exercice 14 - Fixer un taux acceptable

Si le lot a un taux de défaut t , il est accepté (aucune pièce défectueuse sur quatre) avec la probabilité $(1 - t)^4$. On veut

$$(1 - t)^4 > 0,9$$

On teste des valeurs :

— $t = 0,02 : 0,98^4 \approx 0,922$;

— $t = 0,03 : 0,97^4 \approx 0,885$.

Le taux de défaut doit rester inférieur à environ 2,6 % (à la calculatrice : $(1 - t)^4 = 0,9$ pour $t \approx 0,026$).

Réponse. Environ 2,6 % au maximum.

Correction de l'exercice 15 - Ordonner des probabilités

Avec $p = 0,2$ et quatre épreuves (loi : 0,4096 ; 0,4096 ; 0,1536 ; 0,0256 ; 0,0016) :

- exactement trois : 0,0256 ;
- au moins deux : $0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 0,1808$;
- exactement un : 0,4096 ;
- au plus un : $0,4096 + 0,4096 = 0,8192$.

Ordre croissant :

exactement trois < au moins deux < exactement un < au plus un

Réponse. $0,0256 < 0,1808 < 0,4096 < 0,8192$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : quatre essais

Chaque essai réussit avec la probabilité 0,6, indépendamment.

a) Aucun essai ne réussit : $0,4^4 = 0,0256$.

b) Au moins un succès : $1 - 0,0256 = 0,9744$.

c) Avec n essais, au moins un succès a pour probabilité $1 - 0,4^n$. On veut $0,4^n < 0,01$:

$$0,4^5 = 0,01024 \quad 0,4^6 = 0,004096$$

Il faut 6 **essais** pour dépasser 0,99.

Réponse. a) 0,0256 — b) 0,9744 — c) 6 essais.