

Plaquette 2 – Deux et trois épreuves : l'arbre complet

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

L'épreuve de Bernoulli. Deux issues seulement : le succès S de probabilité p , l'échec de probabilité $1 - p$.

Répétition indépendante. Mêmes conditions à chaque fois, aucun effet d'une épreuve sur les suivantes.

Les deux gestes.

Objet	Geste
un chemin	on multiplie
un événement	on additionne les chemins

Nombre de chemins.

Épreuves	Chemins	Répartition selon le nombre de succès
2	4	1 ; 2 ; 1
3	8	1 ; 3 ; 3 ; 1

Deux succès sur trois épreuves.

$$P = 3 \times p^2(1 - p)$$

Le facteur 3 compte les **positions** possibles de l'échec.

Contrôle permanent. La somme des probabilités de tous les chemins vaut 1.

⚠ Un tirage **sans remise** n'est pas une répétition indépendante : les probabilités changent d'un tirage à l'autre.

Correction de l'exercice 1 – Succès, échec et probabilité

Une **épreuve de Bernoulli** n'a que deux issues : le succès, de probabilité p , et l'échec, de probabilité $1 - p$.

a) Oui : la pièce est défectueuse (succès) ou non. $p = 0,08$.

b) Non : mesurer un diamètre donne une valeur numérique, avec une infinité de résultats possibles. Elle le deviendrait si l'on regardait seulement « le diamètre est dans la tolérance » ou non.

c) Oui : le composant fonctionne (succès) ou non. $p = 0,97$.

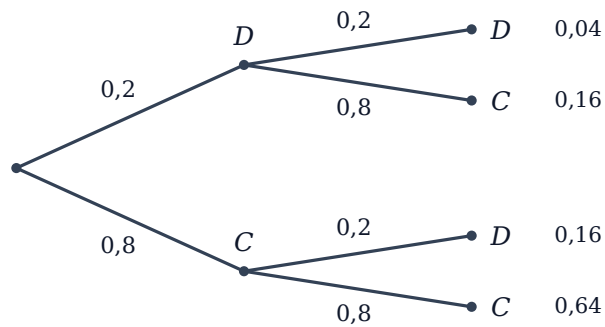
Remarque. Le « succès » est l'issue que l'on compte ; ce n'est pas forcément une bonne nouvelle (en a), le succès est une pièce défectueuse).

Réponse. a) oui, $p = 0,08$ — b) non — c) oui, $p = 0,97$.

Correction de l'exercice 2 – L'arbre à deux épreuves

Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli de succès D (« défectueuse »), avec

$P(D) = 0,2$ et $P(C) = 0,8$. Les prélèvements étant indépendants, les branches sont les mêmes au second niveau.



D : pièce défectueuse, C : conforme

On multiplie le long de chaque chemin :

- $DD : 0,2 \times 0,2 = 0,04$;
- $DC : 0,2 \times 0,8 = 0,16$;
- $CD : 0,8 \times 0,2 = 0,16$;
- $CC : 0,8 \times 0,8 = 0,64$.

Contrôle. $0,04 + 0,16 + 0,16 + 0,64 = 1$.

Réponse. $0,04$; $0,16$; $0,16$; $0,64$.

Correction de l'exercice 3 - Exactement une défectueuse

a) Exactement une pièce défectueuse correspond à **deux chemins** : DC et CD . On additionne leurs probabilités :

$$P(\text{exactement une}) = 0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 = 2 \times 0,16 = 0,32$$

b) Deux pièces défectueuses : un seul chemin, DD , de probabilité $0,04$.

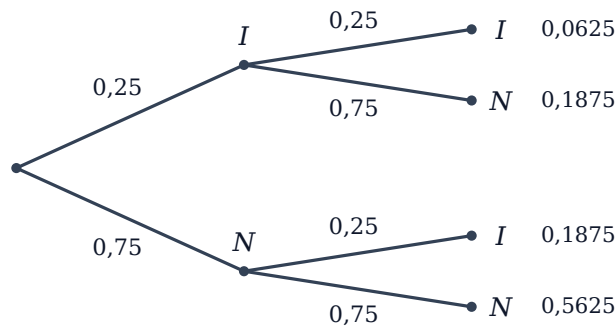
Comparaison. Obtenir exactement une pièce défectueuse est 8 fois plus probable que d'en obtenir deux.

Piège. Oublier l'un des deux chemins donnerait $0,16$: l'ordre (défectueuse en premier ou en second) compte deux cas différents.

Réponse. a) $0,32$ — b) deux défectueuses : $0,04$, huit fois moins probable.

Correction de l'exercice 4 - Loi complète sur deux épreuves

Chaque cycle est une épreuve de Bernoulli de succès « déclenchement intempestif » (I), avec $p = 0,25$.



I : déclenchement intempestif

On regroupe les chemins selon le nombre de déclenchements :

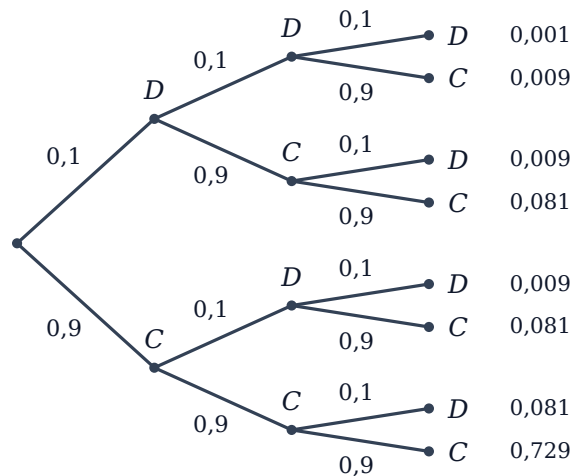
- 0 : chemin NN , $0,75^2 = 0,5625$;
- 1 : chemins IN et NI , $2 \times 0,25 \times 0,75 = 0,375$;
- 2 : chemin II , $0,25^2 = 0,0625$.

Contrôle. $0,5625 + 0,375 + 0,0625 = 1$.

Réponse. $0,5625$; $0,375$; $0,0625$.

Correction de l'exercice 5 - L'arbre à trois épreuves

Chaque prélèvement donne D (défectueuse, $0,1$) ou C (conforme, $0,9$), indépendamment.



Trois prélèvements : 8 chemins

a) À chaque épreuve, chaque chemin se divise en deux : $2 \times 2 \times 2 = 8$ chemins.

b) Aucune pièce défectueuse : le seul chemin CCC .

$$P = 0,9^3 = 0,729$$

Dans 72,9 % des cas, les trois pièces prélevées sont conformes.

Réponse. a) 8 chemins — b) $0,729$.

Correction de l'exercice 6 - Exactement une, exactement deux

Sur l'arbre à trois épreuves ($p = 0,1$) :

a) Exactement une défectueuse : 3 chemins (DCC , CDC , CCD), chacun de probabilité $0,1 \times 0,9^2 = 0,081$.

$$P = 3 \times 0,1 \times 0,9^2 = 0,243$$

b) Exactement deux : 3 chemins (DDC , DCD , CDD), chacun $0,1^2 \times 0,9 = 0,009$.

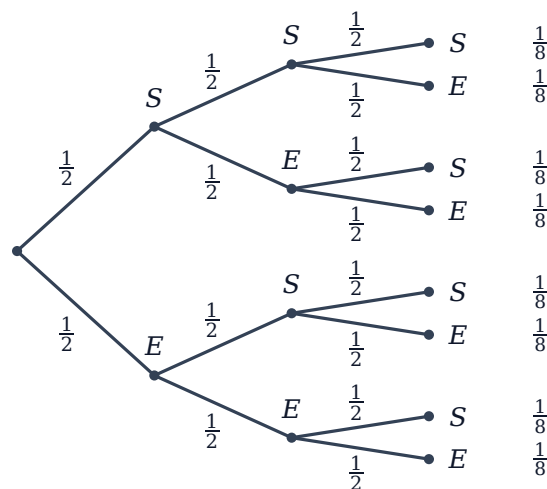
$$P = 3 \times 0,009 = 0,027$$

Contrôle. $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$ (zéro, une, deux, trois pièces défectueuses).

Réponse. a) 0,243 — b) 0,027.

Correction de l'exercice 7 - Une loi symétrique

Avec $p = \frac{1}{2}$, chaque chemin de l'arbre a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, quel que soit le nombre de succès.



$p = 1/2$: tous les chemins valent $1/8$

a) Il suffit de compter les chemins (répartition 1 ; 3 ; 3 ; 1) :

Nombre de succès	0	1	2	3
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) La loi est **symétrique** : 0 et 3 succès ont la même probabilité, de même que 1 et 2. C'est normal : avec $p = \frac{1}{2}$, succès et échec jouent le même rôle.

Réponse. a) $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{8}$ — b) la loi est symétrique.

Correction de l'exercice 8 - Au moins un succès

Chaque cycle donne une panne avec la probabilité 0,2, indépendamment des autres.

a) « Au moins une panne » est le contraire de « aucune panne » (le seul chemin sans panne) :

$$P(\text{au moins une}) = 1 - 0,8^3 = 1 - 0,512 = 0,488$$

b) Par la somme des chemins avec au moins une panne :

— une panne : $3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$;

— deux pannes : $3 \times 0,2^2 \times 0,8 = 0,096$;

— trois pannes : $0,2^3 = 0,008$.

Total : $0,384 + 0,096 + 0,008 = 0,488$. On retrouve a), avec un calcul trois fois plus long : c'est l'intérêt du contraire.

Réponse. a) 0,488 — b) même résultat par la somme des chemins.

Correction de l'exercice 9 - Comparer deux taux

Exactement un défaut sur deux prélèvements correspond à deux chemins (défaut en premier ou en second) :

$$P = 2 \times p \times (1 - p)$$

— Pour $p = 0,3$: $2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$.

— Pour $p = 0,4$: $2 \times 0,4 \times 0,6 = 0,48$.

La probabilité augmente avec p ici : elle atteindrait son maximum, 0,5, pour $p = 0,5$, puis diminuerait (pour p proche de 1, on aurait presque toujours deux défauts, pas un seul).

Réponse. 0,42 pour $p = 0,3$; 0,48 pour $p = 0,4$.

Correction de l'exercice 10 - Oublier les chemins

L'erreur. Le produit $0,2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,032$ est la probabilité d'un **seul** chemin, par exemple SSE. Or deux succès sur trois épreuves peuvent se produire de **trois** façons : SSE, SES et ESS.

Le bon calcul. Les trois chemins ont la même probabilité ; on les additionne :

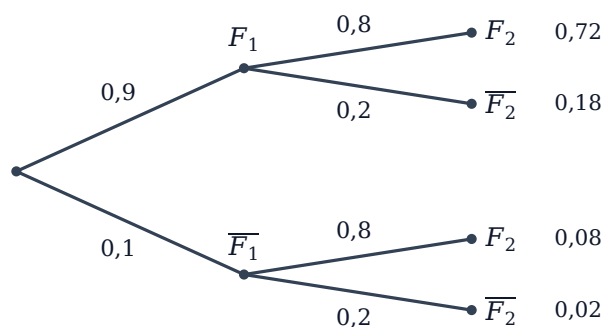
$$P(\text{exactement deux succès}) = 3 \times 0,2^2 \times 0,8 = 3 \times 0,032 = 0,096$$

Repère. Pour trois épreuves, les nombres de chemins selon le nombre de succès sont 1 ; 3 ; 3 ; 1.

Réponse. $3 \times 0,032 = 0,096$.

Correction de l'exercice 11 - Deux épreuves différentes

a) **Non** : les deux composants n'ont pas la même fiabilité, ce ne sont pas deux répétitions d'une **même** épreuve. On peut quand même utiliser un arbre, avec des branches différentes à chaque niveau.



Deux composants différents, indépendants

b) Exactement un composant fonctionne : deux chemins.

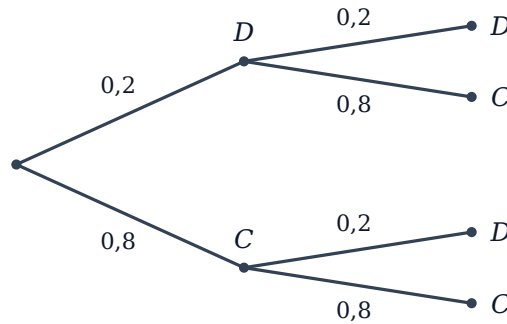
$$P = 0,9 \times 0,2 + 0,1 \times 0,8 = 0,18 + 0,08 = 0,26$$

Attention. La formule « $2 \times p(1 - p)$ » ne s'applique pas ici, puisqu'il n'y a pas un seul p .

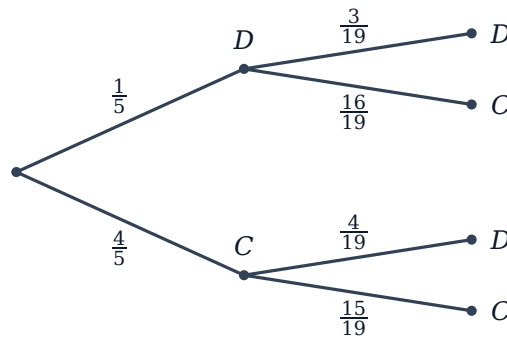
Réponse. a) non (fiabilités différentes) — b) 0,26.

Correction de l'exercice 12 - Avec ou sans remise

Au premier prélèvement, $P(D) = \frac{4}{20} = 0,2$.



Avec remise



Sans remise

a) **Avec remise**, le lot est reconstitué : les deux prélèvements sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

$$P(DD) = 0,2 \times 0,2 = 0,04$$

b) **Sans remise**, après une pièce défectueuse il en reste 3 sur 19 :

$$P(DD) = \frac{4}{20} \times \frac{3}{19} = \frac{12}{380} = \frac{3}{95} \approx 0,032$$

Sans remise, les épreuves ne sont plus indépendantes : ce n'est plus une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques.

Réponse. a) 0,04 — b) $\frac{3}{95} \approx 0,032$.

Correction de l'exercice 13 - Trois contrôles réussis

Chaque réglage réussit avec la probabilité 0,8, indépendamment.

a) Trois réussites : un seul chemin.

$$P = 0,8^3 = 0,512$$

b) Exactement deux réussites : trois chemins (l'échec peut être au premier, au deuxième ou au troisième réglage), chacun de probabilité $0,8^2 \times 0,2 = 0,128$.

$$P = 3 \times 0,128 = 0,384$$

Réponse. a) 0,512 — b) 0,384.

Correction de l'exercice 14 - Lire une répartition

a) Ces nombres sont les **nombre de chemins** de l'arbre à trois épreuves qui comportent 0, 1, 2 puis 3 succès :

- 0 succès : *EEE*, un chemin ;
- 1 succès : *SEE, ESE, EES*, trois chemins ;
- 2 succès : *SSE, SES, ESS*, trois chemins ;
- 3 succès : *SSS*, un chemin.

b) Leur somme vaut

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

C'est le nombre total de chemins : chaque épreuve double le nombre de chemins. Ces nombres ne dépendent pas de p : ils comptent des chemins, ce ne sont pas des probabilités.

Réponse. a) les nombres de chemins à 0, 1, 2, 3 succès — b) $8 = 2^3$.

Correction de l'exercice 15 - Un capteur redondant

Chaque capteur marche avec la probabilité 0,9, indépendamment. Le système fonctionne si au moins deux capteurs marchent, c'est-à-dire si **exactement deux** ou **exactement trois** marchent.

- Trois capteurs marchent : $0,9^3 = 0,729$.
- Exactement deux : trois chemins, $3 \times 0,9^2 \times 0,1 = 0,243$.

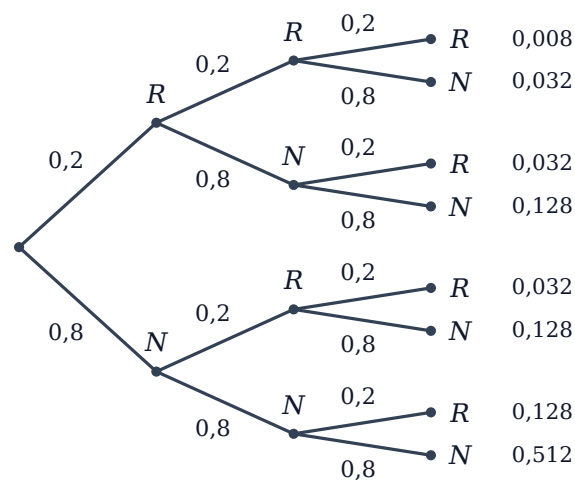
$$P(\text{fonctionne}) = 0,729 + 0,243 = 0,972$$

Lecture. Le système (97,2 %) est plus fiable qu'un capteur seul (90 %) : il tolère la panne d'un capteur.

Réponse. 0,972.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : trois prélèvements

Chaque pièce prélevée est à retoucher (R) avec la probabilité 0,2, indépendamment.



R : pièce à retoucher ($p = 0,2$)

a) En regroupant les chemins (répartition 1 ; 3 ; 3 ; 1) :

Nombre de retouches	0	1	2	3
Probabilité	0,512	0,384	0,096	0,008

Par exemple $P(1) = 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$.

b) Au moins une retouche : $1 - 0,512 = 0,488$.

c) Au plus une retouche : $0,512 + 0,384 = 0,896$.

Réponse. a) 0,512 ; 0,384 ; 0,096 ; 0,008 — b) 0,488 — c) 0,896.