

Plaquette 3 – Quatre épreuves et comptage des chemins

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Nombre de chemins.

Épreuves	Total	Selon le nombre de succès
2	4	1 ; 2 ; 1
3	8	1 ; 3 ; 3 ; 1
4	16	1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1

Construction de la ligne. Chaque nombre est la somme des deux placés au-dessus :

1 4 6 4 1

vient de 1 ; 3 ; 3 ; 1.

Probabilité d'exactly k succès sur quatre épreuves.

$$P = (\text{nombre de chemins}) \times p^k(1 - p)^{4-k}$$

Les deux cas fréquents.

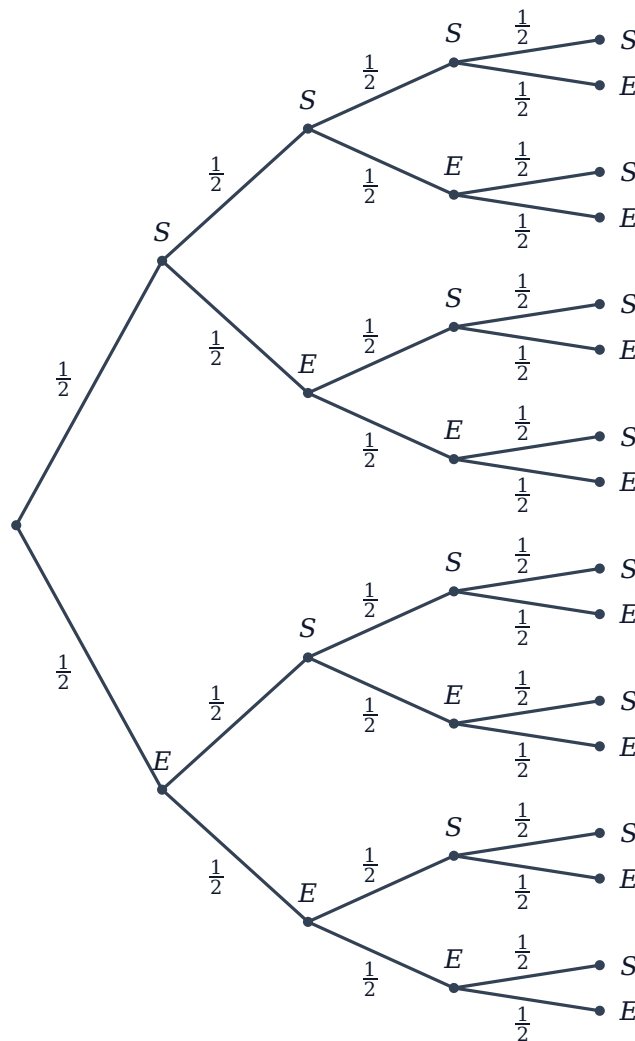
$$P(\text{aucun}) = (1 - p)^4 \quad P(\text{au moins un}) = 1 - (1 - p)^4$$

Contrôle. Les cinq probabilités ont pour somme 1.

△ Le nombre de chemins ne dépend **pas** de p : c'est un comptage, pas une probabilité.

Correction de l'exercice 1 - Compter les chemins

À chaque épreuve, chaque chemin se divise en deux branches (S ou E).



Quatre épreuves : 16 chemins

a) Le nombre de chemins est $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$.

b) Les chemins à exactement deux succès sont ceux qui comportent deux S et deux E : $SSEE$, $SESE$, $SEES$, $ESSE$, $ESES$, $EESS$, soit 6 **chemins**.

Repère. La répartition complète des 16 chemins selon le nombre de succès est 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1.

Réponse. a) 16 — b) 6.

Correction de l'exercice 2 - Construire la ligne

Chaque nombre de la nouvelle ligne est la somme des deux nombres placés au-dessus de lui (on ajoute un 0 fictif aux extrémités) : un chemin à k succès sur $n + 1$ épreuves vient soit d'un chemin à k succès suivi d'un échec, soit d'un chemin à $k - 1$ succès suivi d'un succès.

a) Depuis 1 ; 3 ; 3 ; 1 :

$$1 \quad 1 + 3 = 4 \quad 3 + 3 = 6 \quad 3 + 1 = 4 \quad 1$$

soit 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1 pour quatre épreuves.

b) Depuis cette ligne : 1 ; 5 ; 10 ; 10 ; 5 ; 1.

Contrôle. $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$ et $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.

Réponse. a) 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1 — b) 1 ; 5 ; 10 ; 10 ; 5 ; 1.

Correction de l'exercice 3 - Loi complète sur quatre prélèvements

Chaque pièce est défectueuse avec la probabilité $p = 0,2$, indépendamment. Pour k défauts sur 4 prélèvements :

$$P(k \text{ défauts}) = (\text{nombre de chemins}) \times 0,2^k \times 0,8^{4-k}$$

avec les nombres de chemins 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1.

k	0	1	2	3	4
Probabilité	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Par exemple $P(2) = 6 \times 0,2^2 \times 0,8^2 = 6 \times 0,04 \times 0,64 = 0,1536$.

Contrôle. La somme vaut 1.

Réponse. 0,4096 ; 0,4096 ; 0,1536 ; 0,0256 ; 0,0016.

Correction de l'exercice 4 - Au moins un défaut

« Au moins un défaut » est le contraire de « aucun défaut », qui correspond au seul chemin où toutes les pièces sont conformes (0,9 chacune).

a) Sur quatre pièces :

$$P = 1 - 0,9^4 = 1 - 0,6561 = 0,3439$$

b) Sur trois pièces : $1 - 0,9^3 = 1 - 0,729 = 0,271$.

Prélever une pièce de plus fait passer la probabilité de détecter au moins un défaut de 27,1 % à 34,4 %.

Réponse. a) 0,3439 — b) 0,271 avec trois pièces.

Correction de l'exercice 5 - Exactement deux succès

Six chemins comportent exactement deux succès sur quatre épreuves, chacun de probabilité $0,25^2 \times 0,75^2$:

$$P = 6 \times 0,25^2 \times 0,75^2 = 6 \times 0,0625 \times 0,5625 \approx 0,211$$

Valeur exacte. $6 \times \frac{1}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{54}{256} = \frac{27}{128} \approx 0,211$.

Réponse. $\frac{27}{128} \approx 0,211$.

Correction de l'exercice 6 - Une loi symétrique

Avec $p = \frac{1}{2}$, chacun des 16 chemins a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Il suffit de compter les chemins.

a) La loi complète :

Nombre de succès	0	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

b) Autant de succès que d'échecs, c'est exactement deux succès :

$$P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$$

C'est le résultat le plus probable, mais il n'arrive pas une fois sur deux.

Réponse. a) $\frac{1}{16}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{6}{16}$; $\frac{4}{16}$; $\frac{1}{16}$ — b) $\frac{3}{8}$.

Correction de l'exercice 7 - Quatre pièces contrôlées

Chaque pièce est défectueuse avec la probabilité 0,05, indépendamment.

a) Aucune pièce défectueuse :

$$P = 0,95^4 \approx 0,8145$$

b) Au moins une, par le contraire : $1 - 0,8145 = 0,1855$.

Lecture. Même avec 5 % de défauts, un contrôle de quatre pièces ne trouve rien dans plus de 8 cas sur 10.

Réponse. a) $\approx 0,8145$ — b) $\approx 0,1855$.

Correction de l'exercice 8 - Oublier le facteur 6

L'erreur. L'élève a multiplié par 4 au lieu de 6. Sur quatre épreuves, il y a **six** chemins comportant exactement deux défauts (*DDCC*, *DCDC*, *DCCD*, *CDDC*, *CD CD*, *CCDD*) ; le nombre 4 correspond à un ou trois défauts.

Le bon calcul.

$$P = 6 \times 0,2^2 \times 0,8^2 = 6 \times 0,04 \times 0,64 = 0,1536$$

Repère. Ligne de quatre épreuves : 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1.

Réponse. $6 \times 0,04 \times 0,64 = 0,1536$.

Correction de l'exercice 9 - Au plus un défaut

Avec $p = 0,2$ et quatre prélèvements.

a) « Au plus un » signifie zéro **ou** un défaut :

$$P = 0,8^4 + 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192$$

b) « Au moins deux » est le contraire de « au plus un » :

$$P = 1 - 0,8192 = 0,1808$$

Piège. « Au plus un » inclut le cas zéro.

Réponse. a) 0,8192 — b) 0,1808.

Correction de l'exercice 10 - Quatre capteurs

Chaque capteur marche avec la probabilité 0,9, indépendamment. Le système fonctionne si trois ou quatre capteurs marchent.

— Quatre capteurs : $0,9^4 = 0,6561$.

— Exactement trois : quatre chemins (le capteur en panne peut être n'importe lequel),
 $4 \times 0,9^3 \times 0,1 = 0,2916$.

$$P(\text{fonctionne}) = 0,6561 + 0,2916 = 0,9477$$

Réponse. 0,9477.

Correction de l'exercice 11 – Lister les chemins

Il faut placer deux S parmi quatre positions. On les liste dans l'ordre, selon la position du premier S :

- premier S en position 1 : *SSEE, SESE, SEES* ;
- premier S en position 2 : *ESSE, ESES* ;
- premier S en position 3 : *EESS*.

On obtient bien 6 **chemins**, le nombre central de la ligne 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1.

Méthode. Classer les chemins (ici selon la position du premier succès) évite d'en oublier ou d'en compter deux fois.

Réponse. *SSEE, SESE, SEES, ESSE, ESES, EESS*.

Correction de l'exercice 12 – Acceptation d'un lot

Chaque pièce est défectueuse avec la probabilité 0,3, indépendamment. Le lot est accepté si l'on trouve zéro ou un défaut.

a) Calcul :

$$P(\text{acceptation}) = 0,7^4 + 4 \times 0,3 \times 0,7^3 = 0,2401 + 0,4116 = 0,6517$$

b) **Non** : un lot qui contient 30 % de pièces défectueuses est accepté environ deux fois sur trois. Un échantillon de quatre pièces est trop petit pour repérer un lot de mauvaise qualité ; il faudrait prélever davantage ou durcir la règle (n'accepter qu'avec zéro défaut).

Réponse. a) $\approx 0,652$ — b) non, il protège mal le client.

Correction de l'exercice 13 – Comparer trois et quatre épreuves

Avec $p = 0,2$:

a) Exactement un succès sur trois épreuves : $3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$. Sur quatre : $4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096$.

b) Deux effets jouent en sens contraires : il y a **plus de chemins** à un succès (4 au lieu de 3), mais chacun est **moins probable** (un échec de plus, facteur 0,8). Ici, le nombre de chemins l'emporte légèrement : $\frac{4}{3} \times 0,8 \approx 1,07 > 1$.

Réponse. a) 0,384 puis 0,4096 — b) plus de chemins, chacun un peu moins probable.

Correction de l'exercice 14 – Deux succès au moins

Chaque essai réussit avec la probabilité 0,3, indépendamment.

a) « Au moins deux » est le contraire de « au plus un » :

$$P = 1 - \left(0,7^4 + 4 \times 0,3 \times 0,7^3 \right) = 1 - (0,2401 + 0,4116) = 0,3483$$

b) Aucune réussite : $0,7^4 = 0,2401$.

Réponse. a) 0,3483 — b) 0,2401.

Correction de l'exercice 15 – Le nombre de chemins ne dépend pas de p

Ce qui est faux. Le nombre de chemins est un **comptage** dans l'arbre, qui ne dépend pas de p . Sur quatre épreuves, il y a 4 chemins à trois succès et 4 chemins à un succès, quelle que soit la valeur de p .

Ce qui est vrai. C'est la **probabilité de chaque chemin** qui dépend de p . Avec $p = 0,9$:

$$P(3 \text{ succès}) = 4 \times 0,9^3 \times 0,1 = 0,2916 \quad P(1 \text{ succès}) = 4 \times 0,9 \times 0,1^3 = 0,0036$$

Trois succès sont bien plus **probables**, mais pas plus **nombreux** en chemins.

Réponse. Il y a autant de chemins (4) ; seules leurs probabilités diffèrent.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : quatre contrôles

Chaque contrôle laisse passer le défaut avec la probabilité 0,3, indépendamment.

a) Le défaut passe les quatre contrôles :

$$P = 0,3^4 = 0,0081$$

b) Il est détecté au moins une fois (contraire de a) : $1 - 0,0081 = 0,9919$.

c) Le défaut passe n contrôles avec la probabilité $0,3^n$. On cherche $0,3^n < 0,01$:

$$0,3^3 = 0,027 \quad 0,3^4 = 0,0081$$

Il faut 4 **contrôles** pour que le risque tombe sous 1 %.

Réponse. a) 0,0081 — b) 0,9919 — c) 4 contrôles.