

Plaquette 5 - Répétitions en atelier : problèmes complets

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La chaîne de résolution.

Étape	Question à se poser
1	quelle est l'épreuve, quel est le succès
2	les répétitions sont-elles indépendantes
3	combien de répétitions
4	quelle formulation : exactement, au moins, au plus
5	quelle conclusion technique

Les formules mobilisées.

$$P(\text{aucun}) = (1 - p)^n \quad P(\text{tous}) = p^n$$

$$P(\text{exactement } k) = (\text{nombre de chemins}) \times p^k (1 - p)^{n-k}$$

Lignes de comptage.

Épreuves	Chemins par nombre de succès
3	1 ; 3 ; 3 ; 1
4	1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1

Conclure. Donner la valeur, puis sa lecture en atelier : combien de lots sur cent, combien d'interventions par an.

⚠ Vérifier l'indépendance avant de multiplier : une usure progressive ou un tirage sans remise l'interdisent.

Correction de l'exercice 1 - Quatre soudures

Chaque soudure est bonne avec la probabilité 0,97, indépendamment des autres : on répète quatre fois une épreuve de Bernoulli.

a) Les quatre sont bonnes (un seul chemin) :

$$P = 0,97^4 \approx 0,8853$$

b) Au moins une à reprendre est le contraire de a) : $1 - 0,8853 = 0,1147$.

Lecture en atelier. Environ 11 pièces sur 100 ont au moins une soudure à reprendre, alors que chaque soudure n'échoue que 3 fois sur 100 : les risques s'accumulent sur les quatre soudures.

Réponse. a) $\approx 0,885$ — b) $\approx 0,115$.

Correction de l'exercice 2 - Combien de soudures à reprendre

Le succès compté est « la soudure est mauvaise », de probabilité 0,03.

a) Exactement une mauvaise : 4 chemins (la mauvaise soudure peut être l'une des

quatre).

$$P = 4 \times 0,03 \times 0,97^3 \approx 0,1095$$

b) Au moins deux mauvaises est le contraire de « zéro ou une » :

$$P = 1 - 0,97^4 - 4 \times 0,03 \times 0,97^3 \approx 1 - 0,8853 - 0,1095 = 0,0052$$

Avoir deux soudures à reprendre sur une même pièce est rare : environ 5 pièces sur 1000.

Réponse. a) $\approx 0,110$ — b) $\approx 0,005$.

Correction de l'exercice 3 - Trois pompes

Chaque pompe fonctionne avec la probabilité 0,85, indépendamment.

a) Les trois fonctionnent : $0,85^3 \approx 0,6141$.

b) Au moins une fonctionne est le contraire de « les trois sont en panne » (0,15 chacune) :

$$P = 1 - 0,15^3 = 1 - 0,003375 = 0,996625$$

Lecture. Exiger les trois pompes fait tomber la disponibilité à 61 % ; n'en exiger qu'une la porte à 99,7 %.

Réponse. a) $\approx 0,614$ — b) $\approx 0,9966$.

Correction de l'exercice 4 - Deux alimentations

Chaque source est disponible avec la probabilité 0,99, indépendamment.

a) Les deux disponibles : $0,99^2 = 0,9801$.

b) Au moins une disponible : contraire de « les deux indisponibles » (0,01 chacune).

$$P = 1 - 0,01^2 = 1 - 0,0001 = 0,9999$$

Intérêt de la redondance. Avec deux sources, l'armoire n'est privée de courant qu'une fois sur 10 000, contre une fois sur 100 avec une seule.

Réponse. a) 0,9801 — b) 0,9999.

Correction de l'exercice 5 - Un plan de prélèvement

Chaque pièce est non conforme avec la probabilité 0,15, indépendamment.

a) Aucune non conforme : $0,85^4 \approx 0,5220$.

b) Exactement une : 4 chemins, chacun de probabilité $0,15 \times 0,85^3$.

$$P = 4 \times 0,15 \times 0,85^3 \approx 0,3685$$

Lecture. Dans plus d'un cas sur deux, un prélèvement de quatre pièces ne révèle aucun problème, alors que 15 % des pièces sont non conformes.

Réponse. a) $\approx 0,522$ — b) $\approx 0,368$.

Correction de l'exercice 6 - Démarrage d'un groupe électrogène

Chaque essai échoue avec la probabilité 0,25, indépendamment.

a) Le groupe démarre en au plus quatre essais, sauf si les quatre premiers échouent :

$$P = 1 - 0,25^4 = 1 - 0,0039 \approx 0,9961$$

b) Avec n essais, la probabilité de démarrer est $1 - 0,25^n$. On veut $0,25^n < 0,001$:

$$0,25^4 \approx 0,0039 \quad 0,25^5 \approx 0,00098$$

Il faut prévoir 5 **essais**.

Réponse. a) $\approx 0,996$ — b) 5 essais.

Correction de l'exercice 7 - Quatre contrôles dimensionnels

Chaque pièce est hors tolérance avec la probabilité 0,04, indépendamment.

a) Aucune hors tolérance parmi les quatre : $0,96^4 \approx 0,8493$.

b) Un contrôle signale au moins une pièce avec la probabilité $1 - 0,8493 = 0,1507$. Sur une journée de huit contrôles, on en attend en moyenne

$$8 \times 0,1507 \approx 1,2$$

soit environ un contrôle par jour qui signale au moins une pièce hors tolérance.

Réponse. a) $\approx 0,849$ — b) environ 1 contrôle par jour.

Correction de l'exercice 8 - Trois moteurs testés

Chaque moteur passe le test avec la probabilité 0,92, indépendamment.

a) Les trois passent : $0,92^3 \approx 0,7787$.

b) Exactement un échoue : 3 chemins (le moteur qui échoue peut être l'un des trois).

$$P = 3 \times 0,08 \times 0,92^2 \approx 0,2031$$

Réponse. a) $\approx 0,779$ — b) $\approx 0,203$.

Correction de l'exercice 9 - Une indépendance douteuse

L'hypothèse en question. Le calcul p^4 suppose quatre épreuves **identiques et indépendantes** : la même probabilité de défaut pour chaque pièce, et aucune influence d'une pièce sur la suivante.

Ici, elle n'est pas vérifiée. La machine se dérègle progressivement : la probabilité de défaut **augmente** au fil de la série. Les quatre pièces n'ont donc pas la même probabilité, et des pièces consécutives sont liées par l'état de la machine.

Conséquence. Le modèle de répétition d'épreuves indépendantes ne s'applique pas ; p^4 sous-estimerait le risque de défauts en fin de série. Il faudrait prélever des pièces à des moments espacés, ou recalibrer la machine avant le contrôle.

Réponse. Non : la probabilité change au cours de la série, les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes.

Correction de l'exercice 10 - Deux capteurs, deux cycles

Chaque mesure est correcte avec la probabilité 0,98, indépendamment ; on effectue quatre mesures.

a) Les quatre sont correctes : $0,98^4 \approx 0,9224$.

b) Exactement une fausse : 4 chemins.

$$P = 4 \times 0,02 \times 0,98^3 \approx 0,0753$$

Réponse. a) $\approx 0,922$ — b) $\approx 0,075$.

Correction de l'exercice 11 – Comparer deux fournisseurs

Pour chaque fournisseur, les quatre pièces sont indépendantes, et aucune n'est défectueuse avec la probabilité $(1 - p)^4$.

— Fournisseur A : $0,95^4 \approx 0,8145$.

— Fournisseur B : $0,9^4 = 0,6561$.

Chez A, un prélèvement de quatre pièces est sans défaut dans 81 % des cas, contre 66 % chez B : doubler le taux de défaut fait chuter nettement la probabilité d'un prélèvement sans défaut.

Réponse. A : $\approx 0,815$; B : $\approx 0,656$.

Correction de l'exercice 12 – Lire une consigne de contrôle

Chaque pièce est non conforme avec la probabilité 0,1, indépendamment.

a) Le lot est refusé si au moins deux pièces sont non conformes, contraire de « zéro ou une » :

$$P(\text{refus}) = 1 - 0,9^4 - 4 \times 0,1 \times 0,9^3 = 1 - 0,6561 - 0,2916 = 0,0523$$

b) **Non**, le plan n'est pas sévère : un lot à 10 % de non-conformes n'est refusé qu'environ 5 fois sur 100.

Réponse. a) $\approx 0,052$ — b) non, il est très peu sévère.

Correction de l'exercice 13 – Un système à deux niveaux

Les éléments sont indépendants.

a) Le bloc capteurs (deux capteurs en redondance) fonctionne si au moins un capteur marche :

$$P(\text{bloc}) = 1 - 0,1^2 = 0,99$$

b) La sécurité fonctionne si le bloc capteurs **et** l'automate fonctionnent :

$$P = 0,99 \times 0,98 = 0,9702$$

Lecture. L'automate, non doublé, limite la fiabilité de l'ensemble (98 % au mieux).

Réponse. a) 0,99 — b) 0,9702.

Correction de l'exercice 14 – Estimer un taux

a) La fréquence des séries sans défaut est $\frac{328}{500} = 0,656$. Pour un taux de défaut t , cette probabilité vaut $(1 - t)^4$. On essaie $t = 0,1$: $0,9^4 = 0,6561$, très proche. On estime $t \approx 0,1$.

b) Contrôle sur une autre valeur : avec $t = 0,1$, la probabilité d'exactly un défaut dans une série vaut $4 \times 0,1 \times 0,9^3 = 0,2916$. Sur 500 séries, on devrait observer environ $500 \times 0,2916 \approx 146$ séries avec exactement un défaut ; on comparera au relevé.

Réponse. a) $t \approx 0,1$ — b) environ 146 séries avec un seul défaut attendues.

Correction de l'exercice 15 – Choisir entre deux stratégies

a) Stratégie 1 : un composant, fiabilité 0,95.

Stratégie 2 : deux composants de fiabilité 0,8 en redondance (il suffit qu'un marche) :

$$P = 1 - 0,2^2 = 1 - 0,04 = 0,96$$

La stratégie 2 est légèrement plus fiable (96 % contre 95 %).

b) Pour qu'elle l'emporte nettement, il faut des composants un peu meilleurs ou un troisième composant : avec deux composants à 0,9, on obtient $1 - 0,1^2 = 0,99$; avec trois composants à 0,8, $1 - 0,2^3 = 0,992$.

Réponse. a) 0,95 contre 0,96 — b) des composants à 0,9 (fiabilité 0,99) ou un troisième composant.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une journée d'atelier

Chaque pièce est à retoucher avec la probabilité 0,08, indépendamment.

a) Aucune retouche sur quatre pièces : $0,92^4 \approx 0,7164$.

b) Au moins une retouche : $1 - 0,7164 = 0,2836$.

c) Sur huit prélèvements dans la journée, on attend en moyenne

$$8 \times 0,2836 \approx 2,3$$

prélèvements contenant au moins une pièce à retoucher, soit deux à trois par jour.

Réponse. a) $\approx 0,716$ — b) $\approx 0,284$ — c) environ 2 à 3.