

Plaquette 4 - Ajustement au jugé, droite de Mayer et moindres carrés

Séries statistiques à deux variables — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Au jugé. On trace une droite qui laisse autant de points au-dessus qu'en dessous. Elle gagne à passer par le point moyen G .

Méthode de Mayer. On range les points par x croissants, on les partage en deux groupes de même effectif, et l'on calcule les points moyens G_1 et G_2 de chaque groupe. La droite de Mayer est (G_1G_2) :

$$a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}}$$

Elle passe par le point moyen G du nuage, milieu de $[G_1G_2]$.

Moindres carrés. La calculatrice donne la droite $y = ax + b$ qui rend **minimale** la somme des carrés des résidus :

$$S = \sum_i (y_i - (ax_i + b))^2$$

Elle passe aussi par G . Pour comparer deux droites, on compare leurs sommes S .

Esprit critique. Des résidus en forme d'arc signalent un nuage incurvé : aucune droite ne convient. Une extrapolation lointaine se signale toujours comme telle.

Correction de l'exercice 1 - Construire la droite de Mayer

a) La méthode de Mayer partage le nuage, rangé par x croissants, en deux groupes de même effectif, et remplace chaque groupe par son point moyen :

$$G_1\left(\frac{1+2+3}{3}; \frac{3+6+6}{3}\right) = G_1(2; 5) \quad G_2\left(\frac{4+5+6}{3}; \frac{10+10+13}{3}\right) = G_2(5; 11)$$

b) La droite de Mayer passe par G_1 et G_2 . Son coefficient directeur vaut $\frac{11-5}{5-2} = 2$, et $5 = 2 \times 2 + b$ donne $b = 1$: $y = 2x + 1$.

Contrôle : en $x = 5$, $2 \times 5 + 1 = 11$, l'ordonnée de G_2 .

Réponse. a) $G_1(2; 5)$ et $G_2(5; 11)$ · b) $y = 2x + 1$.

Correction de l'exercice 2 - La droite de Mayer passe par G

a) $\bar{x} = \frac{21}{6} = 3,5$ et $\bar{y} = \frac{48}{6} = 8$: le point moyen est $G(3,5; 8)$.

b) $2 \times 3,5 + 1 = 8$: la droite passe bien par G .

C'était prévisible : les deux groupes ont le même effectif, donc la moyenne de tout le nuage est la moyenne des deux points moyens. G est le **milieu** de $[G_1G_2]$:

$$\frac{2+5}{2} = 3,5 \quad \frac{5+11}{2} = 8$$

Comme la droite des moindres carrés, la droite de Mayer passe par le point moyen du nuage.

Réponse. a) $G(3,5; 8)$ · b) $2 \times 3,5 + 1 = 8$: G est le milieu de $[G_1G_2]$.

Correction de l'exercice 3 - Un étalonnage par la méthode de Mayer

a) On partage le relevé en deux groupes de trois mesures. Le premier a pour point moyen $G_1\left(1; \frac{3,9}{3}\right) = G_1(1; 1,3)$, le second $G_2\left(4; \frac{11,1}{3}\right) = G_2(4; 3,7)$. La pente vaut

$$a = \frac{3,7 - 1,3}{4 - 1} = 0,8$$

et $1,3 = 0,8 \times 1 + b$ donne $b = 0,5$: $y = 0,8x + 0,5$.

b) À 2,5 bar : $0,8 \times 2,5 + 0,5 = 2,5$ V. Pour 3 V, on résout $0,8x + 0,5 = 3$, d'où $x = 3,125$ bar. Ce sont deux interpolations. La calculatrice donnerait la droite des moindres carrés $y \approx 0,79x + 0,53$, très proche.

Réponse. a) $G_1(1; 1,3)$, $G_2(4; 3,7)$, $y = 0,8x + 0,5$ · b) 2,5 V ; 3,125 bar.

Correction de l'exercice 4 - Ajustement au jugé

a) La droite passe par $(0; 2)$ et $(8; 18)$: sa pente vaut $\frac{16}{8} = 2$, d'où $y = 2x + 2$. Elle donne 2 ; 6 ; 10 ; 14 ; 18, et les résidus valent 0 ; 0,5 ; 0 ; 0,5 ; 0. Ils sont tous positifs ou nuls : la droite est un peu **trop basse**.

b) Le point moyen vaut $G\left(4; \frac{51}{5}\right) = G(4; 10,2)$. La droite de pente 2 qui y passe est $y = 2(x - 4) + 10,2 = 2x + 2,2$. Ses résidus valent -0,2 ; 0,3 ; -0,2 ; 0,3 ; -0,2, de signes alternés.

$$S_1 = 0,25 + 0,25 = 0,50 \quad S_2 = 0,04 \times 3 + 0,09 \times 2 = 0,30$$

La seconde droite ajuste mieux le nuage : un tracé au jugé gagne à passer par le point moyen.

Réponse. a) $y = 2x + 2$; résidus 0 ; 0,5 ; 0 ; 0,5 ; 0 · b) $y = 2x + 2,2$: somme des carrés 0,30 contre 0,50.

Correction de l'exercice 5 - Vérifier les moindres carrés

a) $\bar{x} = \frac{6}{4} = 1,5$ et $\bar{y} = \frac{12}{4} = 3$; $1,4 \times 1,5 + 0,9 = 2,1 + 0,9 = 3$: la droite passe bien par $G(1,5; 3)$.

b) La droite $y = 1,4x + 0,9$ donne 0,9 ; 2,3 ; 3,7 ; 5,1, d'où les résidus 0,1 ; -0,3 ; 0,3 ; -0,1. La droite $y = 1,5x + 0,75$, qui passe aussi par G , donne les résidus 0,25 ; -0,25 ; 0,25 ; -0,25.

$$S_1 = 0,01 + 0,09 + 0,09 + 0,01 = 0,2 \quad S_2 = 4 \times 0,0625 = 0,25$$

La droite de la calculatrice donne la plus petite somme : c'est la définition de la droite des moindres carrés. Aucune autre droite ne fait mieux.

Réponse. a) $G(1,5; 3)$ et $1,4 \times 1,5 + 0,9 = 3$ · b) 0,2 contre 0,25 : la droite de la calculatrice donne la plus petite somme.

Correction de l'exercice 6 - Contrôler un résultat de calculatrice

a) $\bar{x} = 3$ et $\bar{y} = \frac{92}{5} = 18,4$. La droite donne en $x = 3$:

$$3,2 \times 3 + 8,8 = 9,6 + 8,8 = 18,4$$

Elle passe par le point moyen : le résultat est cohérent (un autre résultat aurait signalé une erreur de saisie).

b) En 3,5 h : $3,2 \times 3,5 + 8,8 = 20$ kWh, une interpolation fiable. En 8 h : $3,2 \times 8 + 8,8 = 34,4$ kWh ; le relevé s'arrête à 5 h, c'est une extrapolation à annoncer avec réserve.

Réponse. a) $G(3; 18,4)$ et $3,2 \times 3 + 8,8 = 18,4$ · b) 20 kWh (interpolation) ; 34,4 kWh (extrapolation, avec réserve).

Correction de l'exercice 7 - Un nuage incurvé

a) La droite donne 0,5 ; 14,5 ; 28,5 ; 42,5 ; 56,5 m, d'où les résidus
4 ; -2 ; -4 ; -2 ; 4

b) Les résidus sont positifs aux extrémités et négatifs au milieu : ils dessinent un **arc**. Les points ne sont pas répartis au hasard autour de la droite, le nuage est **incurvé** : un ajustement affine n'est pas pertinent, même s'il est la meilleure droite possible. D'ailleurs, à 20 km/h, il donne $0,7 \times 20 - 20,5 = -6,5$ m, une distance négative absurde. Les écarts successifs (8 ; 12 ; 16 ; 20 m) augmentent : la distance croît de plus en plus vite avec la vitesse.

Réponse. a) 4 ; -2 ; -4 ; -2 ; 4 · b) non : les résidus dessinent un arc, et le modèle donne -6,5 m à 20 km/h.

Correction de l'exercice 8 - Mayer ou moindres carrés ?

a) En $x = 4,5$, la droite de Mayer donne $2 \times 4,5 + 1 = 10$, et la droite des moindres carrés $1,886 \times 4,5 + 1,4 \approx 9,89$. Les deux estimations sont très proches.

b) La droite de Mayer donne 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13, d'où les résidus 0 ; 1 ; -1 ; 1 ; -1 ; 0 et

$$S = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4$$

La droite des moindres carrés fait un peu mieux (3,77) : c'est normal, aucune droite ne peut faire moins qu'elle. La méthode de Mayer, faisable à la main, donne pourtant une droite presque aussi bonne.

Réponse. a) 10 contre environ 9,89 · b) 4 contre 3,77 : la droite des moindres carrés est un peu meilleure, mais les deux sont proches.

Correction de l'exercice 9 - Trier avant de partager

a) Avec les trois premiers points notés, il obtient

$G_1\left(\frac{5+1+4}{3}; \frac{10+3+10}{3}\right) = G_1\left(\frac{10}{3}; \frac{23}{3}\right)$, un point qui mélange des petites et des grandes valeurs de x .

b) La méthode de Mayer partage le nuage en deux groupes **selon les abscisses** : les points de gauche et ceux de droite. On range d'abord les points par x croissants : (1 ; 3), (2 ; 6), (3 ; 6), puis (4 ; 10), (5 ; 10), (6 ; 13).

$$G_1(2; 5) \quad G_2(5; 11)$$

On retrouve la droite $y = 2x + 1$. L'ordre dans lequel les mesures ont été faites n'a aucune importance.

Réponse. a) $G_1\left(\frac{10}{3}; \frac{23}{3}\right)$ · b) il faut ranger les points par x croissants : $G_1(2; 5)$ et $G_2(5; 11)$.

Correction de l'exercice 10 - Une valeur aberrante et la droite de Mayer

a) $G_1(2; 5)$ ne change pas. Le second groupe devient $(4; 10)$, $(5; 10)$, $(6; 30)$, de point moyen $G_2\left(5; \frac{50}{3}\right) \approx G_2(5; 16,67)$. La pente vaut

$$a = \frac{16,67 - 5}{5 - 2} \approx 3,89$$

presque le double de la pente correcte, 2.

b) Une seule mesure aberrante suffit à fausser complètement la droite, et donc toutes les estimations. Avant tout ajustement, on regarde le nuage et l'on vérifie les valeurs qui s'écartent nettement des autres : erreur de saisie à corriger, ou phénomène réel à signaler et à expliquer.

Réponse. a) $G_2\left(5; \frac{50}{3}\right)$, pente environ 3,89 au lieu de 2 · b) une seule valeur aberrante fausse toute la droite : il faut la vérifier.

Correction de l'exercice 11 - Au jugé ou par les moindres carrés

La droite au jugé donne 8 ; 14,25 ; 20,5 ; 26,75 ; 33, d'où les résidus 0 ; -0,25 ; 0,5 ; -0,75 ; 0 et

$$S_1 = 0,0625 + 0,25 + 0,5625 = 0,875$$

La droite de la calculatrice donne 8 ; 14,2 ; 20,4 ; 26,6 ; 32,8, d'où les résidus 0 ; -0,2 ; 0,6 ; -0,6 ; 0,2 et $S_2 = 0,04 + 0,36 + 0,36 + 0,04 = 0,8$.

La droite des moindres carrés est la meilleure ($0,8 < 0,875$), mais le tracé au jugé en est très proche. Pour une estimation rapide, un tracé soigné suffit ; pour un compte rendu, on donne la droite de la calculatrice.

Réponse. 0,875 pour la droite au jugé, 0,8 pour celle de la calculatrice : les deux sont proches, la seconde est la meilleure.

Correction de l'exercice 12 - Interpoler avec une droite de Mayer

a) On résout $0,8x + 0,5 = 2,9$, soit $0,8x = 2,4$:

$$x = \frac{2,4}{0,8} = 3 \text{ bar}$$

C'est une interpolation, dans la plage [0 ; 5] bar.

b) Le modèle donne $x = \frac{5,3 - 0,5}{0,8} = 6$ bar. C'est en dehors de la plage d'étalonnage : rien ne garantit que le capteur reste linéaire au-delà de 5 bar. Il faut confirmer par un étalonnage étendu, ou par un autre instrument.

Réponse. a) 3 bar · b) le modèle donne 6 bar, hors de la plage d'étalonnage : résultat à confirmer.

Correction de l'exercice 13 - Une relation de proportionnalité ?

a) $\bar{I} = 0,3 \text{ A}$ et $\bar{U} = \frac{30,1}{5} = 6,02 \text{ V}$; $19,7 \times 0,3 + 0,11 = 5,91 + 0,11 = 6,02$: la droite passe bien par G.

b) L'ordonnée à l'origine, 0,11 V, est de l'ordre des écarts de mesure (quelques dixièmes de volt) : elle est négligeable, et le relevé est compatible avec une droite passant par l'origine, c'est-à-dire avec une relation de **proportionnalité**. La résistance est la pente :

$$R \approx 19,7 \approx 20 \Omega$$

Contrôle : $\frac{10,0}{0,5} = 20$ et $\frac{6,1}{0,3} \approx 20,3$.

Réponse. a) $G(0,3; 6,02)$ et $19,7 \times 0,3 + 0,11 = 6,02$ · b) oui : l'ordonnée à l'origine est négligeable, $R \approx 20 \Omega$.

Correction de l'exercice 14 - Extrapoler une tendance

a) Année 6 : $15,1 \times 6 + 104,5 = 195,1$, soit environ 195 unités. Année 20 :
 $15,1 \times 20 + 104,5 = 406,5$

soit environ 407 unités.

b) Les deux sont des **extrapolations**. Celle de l'année 6 prolonge la tendance d'un an : elle est raisonnable si rien ne change. Celle de l'année 20 suppose que la croissance reste la même pendant 15 ans de plus : saturation du marché, concurrence, nouveaux produits la rendent très peu fiable. On la présenterait au mieux comme un scénario, pas comme une prévision.

Réponse. a) environ 195 puis 407 unités · b) l'année 6 est une extrapolation proche, raisonnable ; l'année 20 est beaucoup trop lointaine.

Correction de l'exercice 15 - Trois droites pour un même nuage

La droite au jugé donne 2,5 ; 4,5 ; 6,5 ; 8,5 ; 10,5 ; 12,5, d'où les résidus 0,5 ; 1,5 ; -0,5 ; 1,5 ; -0,5 ; 0,5 et

$$S = 0,25 + 2,25 + 0,25 + 2,25 + 0,25 + 0,25 = 5,5$$

Classement : moindres carrés (3,77), puis Mayer (4), puis la droite au jugé (5,5). La droite au jugé ne passe pas par le point moyen $G(3,5; 8)$ (elle donne 7,5) : elle est trop basse, ses résidus sont presque tous positifs. Faire passer un tracé au jugé par G l'améliore déjà nettement.

Réponse. 5,5 pour la droite au jugé, 4 pour Mayer, 3,77 pour les moindres carrés.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une sonde de température

a) Les trois premières mesures ont pour point moyen $G_1\left(10; \frac{162}{3}\right) = G_1(10; 54)$, les trois dernières $G_2\left(40; \frac{198}{3}\right) = G_2(40; 66)$. La pente vaut $\frac{66 - 54}{40 - 10} = 0,4 \Omega$ par degré, et $54 = 0,4 \times 10 + b$ donne $b = 50$:

$$R = 0,4T + 50$$

b) $\bar{T} = 25$ et $\bar{R} = \frac{360}{6} = 60$; $0,4 \times 25 + 50 = 60$: la droite passe par $G(25; 60)$.

c) À 35 °C : $0,4 \times 35 + 50 = 64 \Omega$ (interpolation). Pour 75 Ω : $0,4T + 50 = 75$ donne $T = 62,5$ °C. C'est au-delà de 50 °C : une extrapolation, à confirmer par une mesure. La pente, 0,4 Ω par degré, est la sensibilité de la sonde.

Réponse. a) $G_1(10; 54)$, $G_2(40; 66)$, $R = 0,4T + 50$ · b) $G(25; 60)$ · c) 64 Ω ; 62,5 °C, par extrapolation.