

Plaquette 3 - Droite d'ajustement et estimations

Séries statistiques à deux variables — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La droite des moindres carrés.

$$y = ax + b$$

Elle rend minimale la somme des carrés des écarts verticaux entre les points et la droite.

À la calculatrice. Menu statistiques à deux variables, saisir les x_i et les y_i , puis régression linéaire. On lit a et b .

Deux points de contrôle.

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

La droite passe par G , et l'ordonnée à l'origine se retrouve depuis G et la pente.

Estimer.

Position de x	Nom	Confiance
dans le relevé	interpolation	bonne
hors du relevé	extrapolation	à justifier

Inverser la relation. Pour remonter de y à x :

$$x = \frac{y - b}{a}$$

Le résidu d'un point.

$$e_i = y_i - (ax_i + b)$$

Des résidus petits et de signes alternés signent un bon ajustement.

⚠ Une extrapolation lointaine peut donner un résultat **physiquement impossible** : toujours confronter au bon sens technique.

Correction de l'exercice 1 - Couple moteur et régime

a) Le point moyen vaut $\bar{x} = 2\,000$ tr/min et $\bar{y} = \frac{15 + 22 + 30 + 37 + 45}{5} = \frac{149}{5} = 29,8$

N·m. La droite y passe bien :

$$0,015 \times 2\,000 - 0,2 = 30 - 0,2 = 29,8$$

b) À 3 500 tr/min : $0,015 \times 3\,500 - 0,2 = 52,3$ N·m. Le relevé s'arrête à 3 000 tr/min : c'est une **extrapolation**, à annoncer comme telle (le couple d'un moteur finit par plafonner).

Réponse. a) la droite donne bien 29,8 en $x = 2\,000$ · b) environ 52,3 N·m, par extrapolation.

Correction de l'exercice 2 - Les résidus du moteur

Le résidu d'un point est la mesure moins la valeur donnée par la droite, $e_i = y_i - (0,015x_i - 0,2)$. La droite donne 14,8 ; 22,3 ; 29,8 ; 37,3 ; 44,8, d'où les résidus

$$0,2 ; -0,3 ; 0,2 ; -0,3 ; 0,2$$

Ils sont petits (au plus 0,3 N·m pour des couples de 15 à 45), de signes alternés, et de somme nulle, comme toujours pour la droite des moindres carrés. Les points sont répartis de part et d'autre de la droite sans courbure : l'ajustement est **excellent**.

Réponse. 0,2 ; -0,3 ; 0,2 ; -0,3 ; 0,2 : somme nulle, signes alternés, ajustement excellent.

Correction de l'exercice 3 - Remonter du couple au régime

Pour remonter du couple au régime, on résout l'équation $0,015x - 0,2 = y$, c'est-à-dire $x = \frac{y + 0,2}{0,015}$.

a) Pour 40 N·m :

$$x = \frac{40,2}{0,015} = 2\,680 \text{ tr/min}$$

C'est une interpolation, dans la plage mesurée.

b) Pour 50 N·m : $x = \frac{50,2}{0,015} \approx 3\,347$, soit environ 3 350 tr/min. On sort de la plage mesurée (3 000 tr/min au plus) : c'est une extrapolation, moins fiable.

Réponse. a) 2680 tr/min · b) environ 3350 tr/min, par extrapolation.

Correction de l'exercice 4 - Un capteur de pression

a) La pente 0,5 est la **sensibilité** du capteur : sa sortie augmente de 0,5 V par bar. L'ordonnée à l'origine 1 est la tension à pression nulle, l'**offset** : le capteur délivre 1 V au repos, ce qui permet de distinguer « pression nulle » de « capteur débranché ».

b) À 12 bar :

$$y = 0,5 \times 12 + 1 = 7 \text{ V}$$

Le relevé s'arrête à 10 bar : c'est une extrapolation, et le capteur pourrait saturer avant. Il faut vérifier sa plage dans la documentation.

Réponse. a) 0,5 V/bar de sensibilité, 1 V d'offset · b) 7 V, mais le capteur peut saturer avant.

Correction de l'exercice 5 - Résidus du capteur

La droite $y = 0,5x + 1$ donne 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 pour les six pressions. Les résidus, mesure moins valeur de la droite, valent

$$0 ; -0,1 ; 0,1 ; 0 ; 0,1 ; -0,1$$

Ils ne dépassent pas 0,1 V, soit moins de 3 % des tensions mesurées, et leurs signes alternent sans former d'arc. L'ajustement est **valide** : les écarts relèvent de la précision des mesures. Leur somme est nulle, ce qui est normal pour une droite passant par le point moyen.

Réponse. 0 ; -0,1 ; 0,1 ; 0 ; 0,1 ; -0,1 : résidus minuscules, ajustement valide.

Correction de l'exercice 6 - Reconstruire b depuis G

La droite des moindres carrés passe par le point moyen : $\bar{y} = a\bar{x} + b$. On en déduit l'ordonnée à l'origine :

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 29,8 - 0,015 \times 2\,000 = 29,8 - 30 = -0,2$$

La droite a donc pour équation $y = 0,015x - 0,2$, celle que donnait la calculatrice. Connaître la pente et le point moyen suffit pour retrouver la droite, sans recommencer tout le calcul.

Réponse. $b = -0,2$, d'où $y = 0,015x - 0,2$.

Correction de l'exercice 7 - Décharge d'une batterie

a) La pente $a = -0,237$ est négative : la tension **diminue** avec le temps, d'environ 0,237 V par heure. Les écarts successifs ($-0,25$; $-0,25$; $-0,2$; $-0,25$; $-0,25$) sont très réguliers : les points sont bien alignés, l'ajustement affine est pertinent.

b) On résout $-0,237x + 12,593 = 11$:

$$x = \frac{11 - 12,593}{-0,237} = \frac{1,593}{0,237} \approx 6,72 \text{ h}$$

soit environ 6 h 43 min ($0,72 \times 60 \approx 43$). Le relevé s'arrête à 5 h : c'est une extrapolation, prudente car une batterie se décharge souvent plus vite en fin de cycle.

Réponse. a) tension décroissante, points très bien alignés · b) environ 6,7 h, soit 6 h 43 min, par extrapolation.

Correction de l'exercice 8 - Rendement d'une installation

a) À 80 % de charge : $y = 0,646 \times 80 + 45,4 \approx 97,1$ %. Le relevé s'arrête à 60 % : c'est déjà une extrapolation.

b) À 100 % de charge :

$$0,646 \times 100 + 45,4 = 110 \%$$

Un rendement supérieur à 100 % est **impossible** : l'installation produirait plus d'énergie qu'elle n'en reçoit. Le modèle affine sort de son domaine de validité ; en réalité, le rendement plafonne, et une extrapolation lointaine doit toujours être confrontée au bon sens physique.

Réponse. a) environ 97,1 % · b) 110 %, ce qui est impossible : le modèle affine sort de son domaine de validité.

Correction de l'exercice 9 - Interpolation ou extrapolation

Une estimation est une **interpolation** quand x est à l'intérieur de la plage mesurée, ici $[10 ; 60]$, et une **extrapolation** sinon.

- $x = 25$: à l'intérieur, interpolation.
- $x = 60$: c'est une borne de la plage, interpolation.
- $x = 75$: au-delà de 60, extrapolation vers le haut.
- $x = 5$: en deçà de 10, extrapolation vers le bas.

$$10 \leq x \leq 60 \Leftrightarrow \text{interpolation}$$

Une interpolation est fiable si l'ajustement est bon ; une extrapolation doit être justifiée, et d'autant plus prudente qu'on s'éloigne de la plage.

Réponse. 25 et 60 : interpolations · 75 et 5 : extrapolations, des deux côtés de la plage.

Correction de l'exercice 10 - Comparer deux ajustements

On calcule les résidus de chaque droite, puis la somme de leurs carrés.

- $y = 2x + 3$ donne 5 ; 7 ; 9, d'où les résidus 0 ; 0,2 ; 0,1 et une somme des carrés $0 + 0,04 + 0,01 = 0,05$.

— $y = 2,1x + 2,6$ donne 4,7 ; 6,8 ; 8,9, d'où les résidus 0,3 ; 0,4 ; 0,2 et une somme $0,09 + 0,16 + 0,04 = 0,29$.

$$S_1 = 0,05 < S_2 = 0,29$$

Au sens des moindres carrés, la droite $y = 2x + 3$ ajuste mieux le nuage. La seconde laisse d'ailleurs tous les points au-dessus d'elle, signe d'une droite mal placée.

Réponse. Somme des carrés : 0,05 contre 0,29 — le modèle $y = 2x + 3$ l'emporte.

Correction de l'exercice 11 - Une erreur d'inversion

L'élève a calculé l'image de 4 au lieu de chercher l'antécédent de 4. On cherche x tel que $y = 4$, donc on résout l'équation :

$$0,5x + 1 = 4 \Leftrightarrow 0,5x = 3 \Leftrightarrow x = 6$$

Contrôle : $0,5 \times 6 + 1 = 4$. Pour remonter de y à x , on utilise $x = \frac{y-b}{a}$; dans l'exemple du capteur, une sortie de 4 V correspond à 6 bar.

Réponse. $x = 6$: il faut résoudre $0,5x + 1 = 4$, et non calculer y en $x = 4$.

Correction de l'exercice 12 - Précision d'une estimation

a) Les mesures s'écartent de la droite d'au plus 0,3 N·m : il est raisonnable d'annoncer une incertitude du même ordre.

$$52,3 - 0,3 \leq C \leq 52,3 + 0,3$$

soit un couple compris entre 52 et 52,6 N·m.

b) Annoncer 52,317 N·m n'aurait aucun sens : l'incertitude porte déjà sur le dixième. On annonce au plus 52,3 N·m, ou 52 N·m arrondi. S'il s'agit d'une extrapolation, l'incertitude réelle est encore plus grande.

Réponse. a) entre 52 et 52,6 N·m · b) au dixième au plus, soit 52,3 N·m, ou 52 N·m arrondi.

Correction de l'exercice 13 - Pente et unités

a) L'unité de la pente est celle de y divisée par celle de x : des **L/100 km par km/h**. La consommation augmente de 0,064 L/100 km à chaque km/h supplémentaire.

b) Entre 90 et 130 km/h, la vitesse augmente de 40 km/h :

$$0,064 \times 40 = 2,56 \text{ L/100 km}$$

À 90 km/h, la consommation vaut $0,064 \times 90 + 1,2 = 6,96$ L/100 km : la hausse représente environ $\frac{2,56}{6,96} \approx 37\%$.

Réponse. a) L/100 km par km/h · b) 2,56 L/100 km de plus, soit environ 37%.

Correction de l'exercice 14 - Deux droites, un même point moyen

a) Une droite de pente a passant par $G(5 ; 20)$ a pour équation $y = a(x - 5) + 20$:

$$y = 3(x - 5) + 20 = 3x + 5 \quad y = 1,5(x - 5) + 20 = 1,5x + 12,5$$

b) Les deux droites passent toutes deux par $G(5 ; 20)$; comme leurs pentes sont différentes, elles ne se coupent qu'en ce point. **Vérification :** $3x + 5 = 1,5x + 12,5$ donne $1,5x = 7,5$, soit $x = 5$, et $y = 20$.

Réponse. a) $y = 3x + 5$ et $y = 1,5x + 12,5$ · b) en $G(5 ; 20)$, leur point moyen commun.

Correction de l'exercice 15 - Lire un nuage avec deux régimes

- a) Tant que la force reste modérée, l'allongement est proportionnel à la force : les points sont alignés. Au-delà de 50 N, la courbe s'infléchit : le ressort a quitté son domaine **élastique** (il se déforme durablement, ou ses spires se touchent).
- b) On n'ajuste pas une droite sur l'ensemble : elle décrirait mal les deux régimes. On ajuste uniquement la partie linéaire, de 0 à 50 N, et l'on précise cette plage de validité dans le compte rendu.

$$\text{droite valable pour } 0 \leq F \leq 50 \text{ N}$$

Au-delà, il faut un autre modèle, ou de nouvelles mesures.

Réponse. a) le ressort a quitté son domaine élastique · b) ajuster uniquement la partie linéaire, en précisant la plage.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : exploiter un étalonnage

- a) À 7 bar : $y = 0,5 \times 7 + 1 = 4,5 \text{ V}$ (interpolation).
- b) On résout $0,5x + 1 = 4,5$, soit $0,5x = 3,5$ et $x = 7 \text{ bar}$.
- c) La carte accepte au plus 5 V. La sortie atteint 5 V lorsque

$$0,5x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 8 \text{ bar}$$

Au-delà de 8 bar, la carte sature et ne mesure plus rien, bien que le capteur fonctionne jusqu'à 10 bar. Il faudrait un diviseur de tension ou une carte plus tolérante pour exploiter toute la plage.

Réponse. a) 4,5 V · b) 7 bar · c) 8 bar, au-delà la carte sature.