

Plaquette 5 - Étalonnage et décisions techniques

Séries statistiques à deux variables — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La chaîne complète.

Étape	Ce qu'on fait
1	tracer le nuage
2	juger l'alignement (allure, résidus)
3	ajuster (au jugé, Mayer, moindres carrés)
4	estimer, ou résoudre
5	conclure en langage technique

Résoudre une inéquation d'ajustement. Pour $ax + b \leq S$ avec $a < 0$, on divise par a et **on change le sens** :

$$x \geq \frac{S - b}{a}$$

Coût unitaire. Si le coût total vaut $C(q) = aq + b$:

$$C_u(q) = a + \frac{b}{q}$$

Le coût unitaire **décroît** avec la quantité : c'est l'effet de série.

Conclure. Une réponse technique comporte toujours : la valeur, son **unité**, et la réserve éventuelle (interpolation ou extrapolation).

⚠ Une décision prise sur une extrapolation lointaine doit être signalée comme telle dans le compte rendu.

Correction de l'exercice 1 - Coût de production

a) La pente 6,75 est le coût de chaque pièce supplémentaire : c'est le **coût variable unitaire**, 6,75 € par pièce. L'ordonnée à l'origine 165 est le coût estimé pour une production nulle : ce sont les **frais fixes**, 165 €.

b) Pour 600 pièces :

$$C = 6,75 \times 600 + 165 = 4\,050 + 165 = 4\,215 \text{ €}$$

Le relevé s'arrête à 500 pièces : c'est une extrapolation proche, à annoncer avec cette réserve. Les points du relevé sont très bien alignés (les résidus de l'exercice suivant le confirment).

Réponse. a) 6,75 € par pièce de coût variable, 165 € de coût fixe · b) environ 4215 €.

Correction de l'exercice 2 - Les résidus du coût

La droite donne 840 ; 1 515 ; 2 190 ; 2 865 ; 3 540 €. Les résidus, coût mesuré moins coût du modèle, valent

$$10 ; -15 ; 10 ; -15 ; 10$$

Leur somme est nulle et leurs signes alternent : les points sont répartis de part et d'autre

de la droite, sans courbure. L'écart maximal, 15 €, représente moins de 1 % des coûts (par exemple $\frac{15}{2190} \approx 0,7\%$) : le modèle est **très fiable** sur la plage mesurée.

Réponse. 10 ; -15 ; 10 ; -15 ; 10 : écart maximal de 15 €, soit 0,7 % — modèle très fiable.

Correction de l'exercice 3 - Coût unitaire et effet de série

a) Le coût unitaire est le coût total divisé par le nombre de pièces :

$$C_u(q) = \frac{6,75q + 165}{q} = 6,75 + \frac{165}{q}$$

Pour 100 pièces, $6,75 + 1,65 = 8,40$ € ; pour 500, $6,75 + 0,33 = 7,08$ € ; pour 1 000, environ 6,92 €.

b) Les frais fixes de 165 € se répartissent sur un nombre de pièces de plus en plus grand : le coût unitaire **diminue** avec la quantité. C'est l'effet de série. Il ne descend jamais sous 6,75 €, le coût variable d'une pièce.

Réponse. a) 8,40 €, 7,08 € et environ 6,92 € · b) l'effet de série, avec un plancher à 6,75 €.

Correction de l'exercice 4 - Un budget à ne pas dépasser

a) Le coût du lot ne doit pas dépasser 5 000 € :

$$6,75q + 165 \leq 5\,000 \Rightarrow 6,75q \leq 4\,835 \Rightarrow q \leq \frac{4\,835}{6,75} \approx 716,3$$

On a divisé par 6,75, positif : le sens de l'inégalité est conservé.

b) L'atelier peut produire au plus 716 **pièces** avec ce budget (q est entier). Le relevé s'arrêtant à 500 pièces, c'est une extrapolation : il faut vérifier que les coûts restent affines au-delà (heures supplémentaires, approvisionnement).

Réponse. a) $q \leq 716,3$ · b) au plus 716 pièces, avec la réserve d'une extrapolation.

Correction de l'exercice 5 - Durée de vie d'un roulement

a) La pente -37,5 est négative : chaque degré de plus fait perdre environ 37,5 heures de durée de vie au roulement.

b) La droite donne 4 980 ; 4 230 ; 3 480 ; 2 730 ; 1 980 h. Les résidus valent
20 ; -30 ; 20 ; -30 ; 20

Leur somme est nulle, leurs signes alternent, et ils restent petits devant des durées de plusieurs milliers d'heures : l'ajustement affine décrit bien le relevé.

Réponse. a) 37,5 h de durée de vie perdues par degré · b) 20 ; -30 ; 20 ; -30 ; 20, somme nulle.

Correction de l'exercice 6 - Garantir 3000 heures

a) On veut $D \geq 3\,000$:

$$-37,5T + 5\,730 \geq 3\,000 \Rightarrow -37,5T \geq -2\,730 \Rightarrow T \leq \frac{2\,730}{37,5} = 72,8$$

En divisant par -37,5, négatif, on a **changé le sens** de l'inégalité.

b) Pour garantir 3 000 heures, la température de service doit rester sous 72,8 °C. En pratique, avec une marge de sécurité, on la maintiendra sous 72 °C. **Contrôle** : $D(72) = 3\,030$ h.

Réponse. a) $T \leq 72,8 \text{ °C}$ · b) maintenir la température de service sous 72 °C .

Correction de l'exercice 7 - Une extrapolation absurde

a) À 160 °C : $D = -37,5 \times 160 + 5\,730 = -6\,000 + 5\,730 = -270 \text{ h}$. Une durée de vie **négative** est absurde.

b) Le modèle annonce une durée nulle lorsque

$$-37,5T + 5\,730 = 0 \Leftrightarrow T = \frac{5\,730}{37,5} = 152,8 \text{ °C}$$

Le relevé s'arrête à 100 °C : au-delà, le modèle sort de sa plage de validité et ne décrit plus rien. En réalité, la durée de vie diminue sans devenir négative, et à très haute température d'autres phénomènes (dégradation du lubrifiant) prennent le dessus.

Réponse. a) -270 h , donc absurde · b) $152,8 \text{ °C}$: le modèle sort de sa plage de validité, il ne décrit plus rien.

Correction de l'exercice 8 - Un capteur de température

a) À 25 °C : $U = 0,2429 \times 25 + 0,1952 \approx 6,27 \text{ V}$ (interpolation, entre 20 et 30 °C).

b) On résout $0,2429T + 0,1952 = 8$:

$$T = \frac{8 - 0,1952}{0,2429} \approx 32,1 \text{ °C}$$

Contrôle : 8 V est entre les tensions mesurées à 30 °C ($7,4 \text{ V}$) et à 40 °C (10 V), et $32,1 \text{ °C}$ est bien entre 30 et 40 °C .

Réponse. a) environ $6,27 \text{ V}$ · b) environ $32,1 \text{ °C}$.

Correction de l'exercice 9 - Choisir un seuil d'alarme

a) À 45 °C , la tension vaut $U = 0,2429 \times 45 + 0,1952 \approx 11,13 \text{ V}$: c'est la tension de seuil. **Contrôle** : $\frac{11,13 - 0,1952}{0,2429} \approx 45 \text{ °C}$.

b) Les mesures s'écartent un peu de la droite et le capteur a sa propre précision : déclencher exactement à $11,13 \text{ V}$ risque une alarme trop tardive. On prend une marge, par exemple 1 °C :

$$U(44) = 0,2429 \times 44 + 0,1952 \approx 10,88 \text{ V}$$

Régler l'alarme vers $10,88 \text{ V}$ (soit 44 °C) garantit qu'elle se déclenche avant 45 °C .

Réponse. a) environ $11,13 \text{ V}$ · b) régler vers $10,88 \text{ V}$, soit 44 °C , pour garder une marge.

Correction de l'exercice 10 - Éclairage et courant

a) On résout $0,0427I + 0,4143 = 3,5$:

$$I = \frac{3,5 - 0,4143}{0,0427} \approx 72,3 \text{ mA}$$

(interpolation, entre 60 et 80 mA).

b) Le courant ne peut pas dépasser 100 mA : l'éclairage maximal vaut $0,0427 \times 100 + 0,4143 \approx 4,68 \text{ klx}$, ce qui correspond à la dernière mesure ($4,7 \text{ klx}$). Pour obtenir davantage, il faudrait un driver plus puissant ou une seconde source.

Réponse. a) environ $72,3 \text{ mA}$ · b) environ $4,68 \text{ klx}$.

Correction de l'exercice 11 - Deux fournisseurs

a) Le fournisseur B est plus avantageux lorsque son coût est inférieur :

$$6,20q + 500 < 6,75q + 165 \Leftrightarrow 335 < 0,55q \Leftrightarrow q > \frac{335}{0,55} \approx 609,1$$

B devient plus avantageux à partir d'environ 610 **pièces** : ses frais fixes sont plus élevés, mais son coût par pièce plus faible.

b) Pour 400 pièces, A coûte $6,75 \times 400 + 165 = 2\,865$ € et B $6,20 \times 400 + 500 = 2\,980$ € : on choisit **A**, moins cher de 115 €.

Réponse. a) au-delà d'environ 610 pièces · b) pour 400 pièces, A coûte 2865 € contre 2980 € : choisir A.

Correction de l'exercice 12 - Arrondir au bon moment

a) Avec la pente arrondie à 0,2, l'élève obtient $U = 0,2 \times 50 + 0,1952 \approx 10,20$ V. Le modèle donne

$$U = 0,2429 \times 50 + 0,1952 \approx 12,34 \text{ V}$$

L'écart vaut 2,14 V, soit environ 17 % : l'arrondi de la pente a été multiplié par 50.

b) On garde tous les chiffres significatifs des coefficients pendant le calcul et l'on n'arrondit qu'à la fin. Un arrondi sur la pente est d'autant plus grave que x est grand.

Réponse. a) 10,20 V contre 12,34 V, soit 17 % d'écart · b) on n'arrondit qu'à la fin.

Correction de l'exercice 13 - Maintenance préventive

a) La machine perd 37,5 h de durée de vie par degré ; 25 degrés de plus coûtent

$$25 \times 37,5 = 937,5 \text{ h}$$

À 60 °C, la durée de vie vaut $-37,5 \times 60 + 5\,730 = 3\,480$ h : la perte représente environ $\frac{937,5}{3\,480} \approx 27$ %.

b) À 85 °C, la durée de vie vaut $3\,480 - 937,5 = 2\,542,5$ h. Sur 20 000 h de service, il faut $\frac{20\,000}{2\,542,5} \approx 7,9$, soit 8 remplacements, contre $\frac{20\,000}{3\,480} \approx 5,7$, soit 6 à 60 °C.

Réponse. a) 937,5 h perdues, soit 27 % · b) 8 remplacements au lieu de 6.

Correction de l'exercice 14 - Rédiger une conclusion

La phrase de l'élève mélange tout : un bon alignement ne garantit rien hors de la plage mesurée, et « le coût sera » présente une estimation comme une certitude. Une conclusion correcte précise le modèle, la valeur avec son unité, et la nature de l'estimation :

« D'après l'ajustement $C = 6,75q + 165$, le coût de 600 pièces est estimé à environ 4 215 €. Il s'agit d'une extrapolation, le relevé s'arrêtant à 500 pièces. »

$$C(600) = 6,75 \times 600 + 165 = 4\,215$$

Réponse. « D'après l'ajustement $C = 6,75q + 165$, le coût de 600 pièces est estimé à environ 4215 €. Il s'agit d'une extrapolation, le relevé s'arrêtant à 500 pièces. »

Correction de l'exercice 15 - Décider avec deux critères

On compare les deux critères techniques, puis le prix.

- **Sensibilité** : B donne 0,410 V/°C contre 0,243 V/°C pour A, un signal plus fort.
- **Fidélité** : les points d'étalonnage de A s'écartent de sa droite d'au plus 0,01 V, ceux de B jusqu'à 0,3 V. Converti en température, l'écart de B vaut environ

$$\frac{0,3}{0,410} \approx 0,7 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

contre $\frac{0,01}{0,243} \approx 0,04 \text{ }^{\circ}\text{C}$ pour A.

On choisit le capteur **A** : ses mesures sont reproductibles, alors que celles de B peuvent se tromper de près d'un degré ; les 6 € d'écart de prix ne compensent pas ce défaut.

Réponse. Le capteur A : ses mesures sont précises à quelques centièmes de degré, contre près d'un degré pour B ; les 6 € d'écart ne compensent pas ce défaut.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : du relevé à la décision

a) $\bar{q} = \frac{1\,500}{5} = 300$ et $\bar{C} = \frac{10\,950}{5} = 2\,190 \text{ €}$: $G(300 ; 2\,190)$.

b) $6,75 \times 300 + 165 = 2\,025 + 165 = 2\,190$: la droite passe bien par le point moyen, comme toute droite des moindres carrés.

c) Pour 450 pièces (interpolation, entre 400 et 500) :

$$C(450) = 6,75 \times 450 + 165 = 3\,202,50 \text{ €}$$

C'est 97,50 € sous le plafond de 3 300 €. La commande est **tenable**, avec une marge supérieure aux écarts observés entre le modèle et les mesures (au plus 15 €).

Réponse. a) $G(300 ; 2\,190)$ · b) la droite donne bien 2190 · c) oui : 3202,50 €, soit 97,50 € sous le plafond.