

Plaquette 2 - Nuage de points et point moyen

Séries statistiques à deux variables — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le nuage de points. On place les couples $(x_i; y_i)$ dans un repère : x est la grandeur **réglée**, y la grandeur **mesurée**.

Le point moyen.

$$G(\bar{x}; \bar{y}) \quad \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

La droite d'ajustement par les moindres carrés passe **toujours** par G .

Juger à l'œil.

Allure du nuage	Ajustement affine
points presque alignés	pertinent
forme en courbe	non pertinent
nuage dispersé	non pertinent

Les résidus. Le résidu d'un point est l'écart entre la mesure et la valeur donnée par la droite :

$$e_i = y_i - (ax_i + b)$$

Résidus	Lecture
petits, de signes alternés	ajustement pertinent
grands, de signes alternés	nuage dispersé, mesures peu précises
en forme d'arc	nuage incurvé, ajustement affine inadapté

Pente estimée à la main. En reliant le premier et le dernier point :

$$a \approx \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$$

⚠ Sur un graphique d'étalonnage, lire les **unités** des deux axes avant toute conclusion.

Correction de l'exercice 1 - Point moyen d'un étalonnage

Le point moyen G a pour coordonnées la moyenne des pressions et la moyenne des tensions.

$$\bar{x} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5}{6} = \frac{15}{6} = 2,5 \quad \bar{y} = \frac{0,5 + 1,3 + 2,2 + 2,9 + 3,8 + 4,6}{6} = \frac{15,3}{6} = 2,55$$

Le point moyen est $G(2,5; 2,55)$.

Contrôle : 2,5 est au milieu des pressions, 2,55 entre la plus petite et la plus grande tension. G n'est pas un point du relevé, mais la droite d'ajustement par les moindres carrés passe toujours par lui.

Réponse. $G(2,5; 2,55)$.

Correction de l'exercice 2 - Juger l'alignement

- a) Les écarts successifs de tension valent $1,3 - 0,5 = 0,8$, puis 0,9, 0,7, 0,9 et 0,8.
 b) Les pressions avancent toujours de 1 bar, et les tensions augmentent presque du même montant à chaque fois (entre 0,7 et 0,9 V) : les points sont presque alignés, un **ajustement affine est pertinent**.

La pente vaut environ la moyenne des écarts, $\frac{4,1}{5} = 0,82$ V par bar, comme la pente entre les points extrêmes. Avec le point moyen :

$$y = 0,82(x - 2,5) + 2,55 = 0,82x + 0,5$$

Réponse. a) 0,8 ; 0,9 ; 0,7 ; 0,9 ; 0,8 · b) oui, les écarts sont très proches.

Correction de l'exercice 3 - Une résistance thermique

- a) $\bar{x} = \frac{250}{5} = 50$ °C et $\bar{y} = \frac{597,9}{5} = 119,58$ Ω : $G(50; 119,58)$.
 b) Entre les points extrêmes, la résistance augmente de $139,2 - 100 = 39,2$ Ω pour 100 °C :

$$a \approx \frac{39,2}{100} = 0,392 \text{ Ω par degré}$$

Contrôle : les écarts successifs (9,8 ; 9,7 ; 9,9 ; 9,8 Ω pour 25 °C) sont très réguliers, en moyenne 9,8 Ω, soit 0,392 Ω par degré. Rapporté aux 100 Ω de départ, cela fait 0,00392 par degré, l'ordre de grandeur du platine.

Réponse. a) $G(50; 119,58)$ · b) 0,392 Ω par degré.

Correction de l'exercice 4 - Une dilatation

- a) Les températures avancent de 20 en 20 et les longueurs augmentent toujours de 0,24 mm : une même variation de x produit toujours la même variation de y . Les points sont **exactement alignés**, la série est parfaitement affine.
 b) La pente vaut $\frac{0,24}{20} = 0,012$ mm par degré et la longueur à 0 °C vaut 1 000 mm :

$$L = 0,012T + 1\,000$$

Contrôle : pour $T = 60$, $0,72 + 1\,000 = 1\,000,72$ mm. À 100 °C, la barre mesurerait 1 001,2 mm (extrapolation proche). Rapporté à la longueur, le coefficient vaut $1,2 \times 10^{-5}$ par degré, celui de l'acier.

Réponse. a) oui, les écarts sont constants · b) $L = 0,012T + 1\,000$.

Correction de l'exercice 5 - Reconnaître un modèle

On regarde comment y varie quand x augmente de 1.

- a) Écarts : 5 ; 5 ; 5. Ils sont constants : la série est parfaitement affine, $y = 5x$.
 b) Écarts : 6 ; 10 ; 14. Ils ne sont pas constants, le nuage est **incurvé** : un ajustement affine ne convient pas. On reconnaît $y = 2x^2$ (2 ; 8 ; 18 ; 32).
 c) Écarts : 3 ; 6 ; 12. Ils ne sont pas constants non plus, mais les quotients valent tous 2 : la série est géométrique, $y = 3 \times 2^{x-1}$, et un ajustement affine ne convient pas.

écarts constants $\Leftrightarrow$ points alignés

Réponse. a) oui · b) non, second degré · c) non, exponentiel.

Correction de l'exercice 6 - Lire des résidus

Un résidu est l'écart entre une mesure et la valeur donnée par la droite. On juge un ajustement sur leur taille et sur leur répartition.

- **A** : résidus très petits et de signes alternés : les points sont tout près de la droite, l'étalonnage est **exploitable**.
- **B** : résidus grands et de signes alternés : les points sont dispersés autour de la droite ; l'étalonnage est peu précis, il faut refaire les mesures ou chercher la cause du bruit.
- **C** : résidus positifs aux extrémités et négatifs au milieu : ils dessinent un **arc**. Les points ne sont pas répartis au hasard, le nuage est incurvé : un ajustement affine ne convient pas.

$$e_i = y_i - (ax_i + b)$$

Seul l'étalonnage A est exploitable tel quel.

Réponse. A seulement : B est trop dispersé, et les résidus de C dessinent un arc (nuage incurvé).

Correction de l'exercice 7 - Un débit et une ouverture

a) $\bar{x} = \frac{150}{5} = 30 \%$ et $\bar{y} = \frac{185}{5} = 37$ L/min : $G(30; 37)$.

b) Entre les points extrêmes, le débit augmente de $62 - 12 = 50$ L/min pour 40 points d'ouverture :

$$a \approx \frac{50}{40} = 1,25 \text{ L/min par point d'ouverture}$$

Chaque point d'ouverture supplémentaire fait gagner environ 1,25 L/min. **Contrôle** : les écarts successifs (13 ; 11 ; 14 ; 12 pour 10 points) sont proches de 12,5. Avec le point moyen, $y = 1,25(x - 30) + 37 = 1,25x - 0,5$.

Réponse. a) $G(30; 37)$ · b) 1,25 L/min par point d'ouverture.

Correction de l'exercice 8 - Utiliser le point moyen

a) Une droite de pente a passant par $G(\bar{x}; \bar{y})$ a pour équation $y = a(x - \bar{x}) + \bar{y}$:

$$y = 0,82(x - 2,5) + 2,55 = 0,82x - 2,05 + 2,55 = 0,82x + 0,5$$

Contrôle : en $x = 2,5$, on retrouve 2,55.

b) $y = 0,82 \times 6 + 0,5 = 5,42$ V. Les mesures s'arrêtent à 5 bar : c'est une **extrapolation**, raisonnable car proche, mais le capteur pourrait saturer. L'ordonnée à l'origine, 0,5 V, est la tension à pression nulle (l'offset du capteur).

Réponse. a) $y = 0,82x + 0,5$ · b) 5,42 V.

Correction de l'exercice 9 - Une valeur aberrante

a) $\bar{x} = 3$ et $\bar{y} = \frac{10 + 13 + 16 + 19 + 60}{5} = \frac{118}{5} = 23,6$: $G(3; 23,6)$.

b) Les quatre premiers points augmentent de 3 à chaque fois, puis le dernier saute de 41 : la valeur 60 est **aberrante**. Elle tire la moyenne des y vers le haut :

$$\text{sans elle: } \bar{y} = \frac{58}{4} = 14,5$$

Le point moyen se retrouve au-dessus de la plupart des points, et tout ajustement serait faussé. Il faut vérifier la mesure (erreur de saisie, capteur défaillant, changement de calibre) : la corriger si elle est fausse, l'expliquer si elle est réelle, mais jamais la

supprimer sans le dire.

Réponse. a) $G(3; 23,6)$ · b) la valeur 60 est aberrante et fausse le point moyen.

Correction de l'exercice 10 - Choisir la variable réglée

a) On impose la température et on mesure la tension : la grandeur **réglée** se place en abscisse, x est la température et y la tension.

b) La pente a pour unité celle de y divisée par celle de x , le volt par degré : c'est la **sensibilité** du capteur. Par exemple, une pente de $0,01 \text{ V/}^\circ\text{C}$ signifie 10 mV par degré.

$$\text{unité de } a = \frac{\text{unité de } y}{\text{unité de } x}$$

L'ordonnée à l'origine est la tension à 0°C (l'offset). En exploitation, on inverse la relation, $T = \frac{U - b}{a}$; mais l'ajustement se fait dans le sens de l'étalonnage, car les moindres carrés rendent minimaux les écarts mesurés sur y .

Réponse. a) la température · b) la sensibilité du capteur, en volts par degré.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

Le point moyen se **calcule** : ses coordonnées sont les moyennes des x et des y .

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3 \quad \bar{y} = \frac{10 + 13 + 16 + 19 + 22}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

Ici, $G(3; 16)$ coïncide avec le point du milieu, mais par chance : les x sont régulièrement espacés et la série est parfaitement régulière. En remplaçant 22 par 60, la moyenne des y deviendrait 23,6 alors que le point du milieu resterait 16 ; avec $x = 1; 2; 3; 4; 20$, la moyenne des x vaudrait 6, pas 3.

Réponse. Ici $G(3; 16)$ est juste, mais par coïncidence : le point moyen se calcule, il ne se lit pas.

Correction de l'exercice 12 - Deux capteurs à comparer

a) La sensibilité est la pente : $1,15 > 0,82$, le capteur **B** est le plus sensible, il donne plus de volts par bar.

b) La fiabilité se lit sur la dispersion des points autour de la droite. Les points de A en sont au plus à 0,02 V, ceux de B jusqu'à 0,3 V :

$$0,02 \text{ V} \ll 0,3 \text{ V}$$

Le capteur **A** est le plus fiable. Un signal faible mais régulier peut s'amplifier ; un signal fort mais dispersé ne se « nettoie » pas. On retient donc le capteur A, ou l'on cherche la cause de la dispersion de B (montage, alimentation, température).

Réponse. a) le capteur B · b) le capteur A, dont les points sont quinze fois plus proches de la droite : c'est lui qu'il faut retenir.

Correction de l'exercice 13 - Estimer une pente à la main

Première méthode : les points extrêmes. Entre $x = 0$ et $x = 40$, y augmente de $33 - 8 = 25$, d'où une pente de $\frac{25}{40} = 0,625$.

Seconde méthode : les écarts successifs. Ils valent 6 ; 7 ; 5 ; 7, de moyenne 6,25 pour un pas de 10, soit encore 0,625. Les deux méthodes concordent, car la somme des écarts est la variation totale.

Le point moyen vaut $\bar{x} = 20$ et $\bar{y} = \frac{102}{5} = 20,4$, d'où

$$y = 0,625(x - 20) + 20,4 = 0,625x + 7,9$$

Réponse. Les deux méthodes donnent 0,625, et l'équation approchée est $y = 0,625x + 7,9$.

Correction de l'exercice 14 - Interpréter une pente

L'unité de la pente est celle de y divisée par celle de x .

- a) $\frac{\Omega}{^\circ\text{C}}$: la variation de résistance par degré, le coefficient de température.
 - b) $\frac{\text{L/min}}{\text{point}}$: le gain de débit par point d'ouverture, utile pour dimensionner une vanne.
 - c) $\frac{\text{mm}}{\text{N}}$: l'allongement par newton, la souplesse du matériau (l'inverse de sa raideur).
- Une pente de 0,002 mm/N correspond à une raideur de 500 N/mm.

$$\text{unité de } a = \frac{\text{unité de } y}{\text{unité de } x}$$

Écrire l'unité à côté de la pente permet de repérer les erreurs de conversion.

Réponse. a) Ω par degré · b) L/min par point · c) mm par newton.

Correction de l'exercice 15 - Deux séries chronologiques

- a) Série A : les écarts valent tous 4, la suite est **arithmétique** de raison 4. Série B : les écarts (4 ; 4,8 ; 5,76 ; 6,91) ne sont pas constants, mais les quotients valent tous 1,2 : la suite est **géométrique** de raison 1,2.
- b) Seule A se prête à un ajustement affine : ses points sont exactement alignés, sur $y = 4x + 16$ (pour x de 1 à 5). Le nuage de B est incurvé, et la différence s'aggrave en extrapolation :

$$A \text{ en } x = 8:48 \quad B \text{ en } x = 8:20 \times 1,2^7 \approx 71,66$$

Le choix du modèle change complètement la prévision.

Réponse. a) A arithmétique, B géométrique · b) seule A se prête à un ajustement affine.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un étalonnage complet

- a) $\bar{x} = 2,5$ bar et $\bar{y} = \frac{15,3}{6} = 2,55$ V : $G(2,5 ; 2,55)$.
- b) Entre les points extrêmes, la tension augmente de 4,1 V pour 5 bar : $a \approx \frac{4,1}{5} = 0,82$ V/bar.
- c) La droite passe par G :

$$y = 0,82(x - 2,5) + 2,55 = 0,82x + 0,5$$

À 2,5 bar, elle donne 2,55 V (interpolation, fiable). Les résidus valent 0 ; -0,02 ; 0,06 ; -0,06 ; 0,02 ; 0 : quelques centièmes de volt, de signes alternés, l'ajustement est excellent. Pour une tension de 3,5 V, on lit une pression de $\frac{3,5 - 0,5}{0,82} \approx 3,66$ bar.

Réponse. a) $G(2,5 ; 2,55)$ · b) 0,82 V/bar · c) $y = 0,82x + 0,5$, soit 2,55 V à 2,5 bar.