

Plaquette 1 - Nuage de points, point moyen et ajustement affine

Séries statistiques à deux variables — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthodes du cours.

— Une série à deux variables est une liste de couples $(x_i; y_i)$; on la représente par un **nuage de points**.

— **Point moyen** G : ses coordonnées sont les moyennes des deux séries,

$$G(\bar{x}; \bar{y}) \quad \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$$

— La **droite d'ajustement affine** $y = ax + b$ passe **toujours** par le point moyen G (moindres carrés).

— **Interprétation de a** : lorsque x augmente de 1, y varie de a en moyenne (avec l'unité de y).

— **Estimer** une valeur : on remplace x dans l'équation ; l'estimation est fiable **dans** la plage mesurée (interpolation), incertaine en dehors (extrapolation).

— Un nuage **presque aligné** justifie un ajustement affine ; un nuage incurvé appelle un autre modèle.

— Pour retrouver un x à partir d'un y : on résout $ax + b = y$.

Correction de l'exercice 1 - Calculer le point moyen

On calcule les deux moyennes séparément.

$$- \bar{x} = \frac{100 + 200 + 300 + 400 + 500}{5} = \frac{1\,500}{5} = 300 \text{ g.}$$

$$- \bar{y} = \frac{12 + 25 + 36 + 49 + 63}{5} = \frac{185}{5} = 37 \text{ mm.}$$

— Le point moyen est $G(300; 37)$. Il appartiendra nécessairement à la droite d'ajustement.

Réponse. $G(300; 37)$.

Correction de l'exercice 2 - Vérifier qu'une droite passe par G

a) On remplace x par 300 :

$$0,126 \times 300 - 0,8 = 37,8 - 0,8 = 37$$

— On obtient bien $\bar{y} = 37$: la droite passe par $G(300; 37)$, comme l'annonce le cours.

b) Le coefficient directeur 0,126 signifie qu'un **gramme supplémentaire allonge le ressort de 0,126 mm en moyenne**, soit 12,6 mm pour 100 g.

— C'est la traduction de la loi de Hooke sur la plage mesurée.

Réponse. a) $0,126 \times 300 - 0,8 = 37 = \bar{y}$ b) $+1 \text{ g} \rightarrow +0,126 \text{ mm d'allongement}$.

Correction de l'exercice 3 - Estimer par interpolation

On remplace x dans l'équation de la droite.

$$- \text{Pour } x = 250 : y = 0,126 \times 250 - 0,8 = 31,5 - 0,8 = 30,7 \text{ mm.}$$

$$- \text{Pour } x = 450 : y = 0,126 \times 450 - 0,8 = 56,7 - 0,8 = 55,9 \text{ mm.}$$

- Les deux masses sont **à l'intérieur** de la plage mesurée (100 à 500 g) : ce sont des **interpolations**, donc des estimations fiables.

Réponse. $\approx 30,7$ mm et $\approx 55,9$ mm.

Correction de l'exercice 4 - Estimation inverse

On résout l'équation $0,126x - 0,8 = 45$.

- $0,126x = 45,8$.
- $x = \frac{45,8}{0,126} \approx 363,5$ g.
- Vérification : $0,126 \times 363,5 - 0,8 \approx 45,8 - 0,8 = 45$ mm. Correct.
- La valeur trouvée est dans la plage mesurée : l'estimation est fiable.

Réponse. Environ 363,5 g.

Correction de l'exercice 5 - Interpolation ou extrapolation ?

a) $y = 0,126 \times 1\,200 - 0,8 = 151,2 - 0,8 = 150,4$ mm.

b) Non : 1 200 g est très en dehors de la plage mesurée, il s'agit d'une **extrapolation**.

- Physiquement, un ressort a une limite d'élasticité : au-delà, il se déforme de façon permanente et la relation cesse d'être affine. L'estimation de 150,4 mm n'a donc probablement aucun sens.
- Règle de prudence : on n'extrapole jamais sans justifier que le modèle reste valable.

Réponse. a) $\approx 150,4$ mm · b) non : extrapolation, au-delà de la limite d'élasticité.

Correction de l'exercice 6 - Point moyen et relevé de température

a) $\bar{x} = \frac{0 + 20 + 40 + 60 + 80 + 100}{6} = \frac{300}{6} = 50$ °C.

— $\bar{y} = \frac{100 + 108 + 115 + 124 + 131 + 140}{6} = \frac{718}{6} \approx 119,67$ Ω.

— Point moyen : $G(50; \approx 119,67)$.

b) $y = 0,397 \times 50 + 99,81 = 19,85 + 99,81 \approx 119,66$ Ω.

- On retrouve (aux arrondis près) l'ordonnée du point moyen : c'est normal, puisque 50 °C est exactement $\bar{x}$ et que la droite passe par G .

Réponse. a) $G(50; \approx 119,67)$ · b) $\approx 119,7$ Ω.

Correction de l'exercice 7 - Interpréter un coefficient directeur

Le coefficient directeur indique la **variation moyenne de y quand x augmente de 1**, dans les unités de l'énoncé.

- a) +1 point de charge entraîne, en moyenne, +2,5 L/h de consommation.
- b) -0,8 : chaque millier d'heures d'usure fait perdre en moyenne 0,8 point de rendement. Le coefficient est négatif, la relation est décroissante.
- c) +1 N de force allonge la pièce de 0,02 mm en moyenne.
- Dans chaque cas, l'ordonnée à l'origine est la valeur estimée pour $x = 0$: 14 L/h à vide, 96 % de rendement à l'état neuf, 3 mm d'allongement initial.

Réponse. a) +2,5 L/h par point · b) -0,8 point par millier d'heures · c) +0,02 mm par newton.

Correction de l'exercice 8 - Nuage non linéaire

a) Différences : 2, 4, 8, 16 : elles **ne sont pas constantes**, elles doublent.

— Quotients : $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{16}{8} = 2$, $\frac{32}{16} = 2$: **constants**.

b) Non : un ajustement affine suppose des différences constantes. Ici ce sont les **quotients** qui le sont, ce qui correspond à un modèle **géométrique** (ou exponentiel) : $y = 2^x$.

— Un nuage de ce type est nettement incurvé vers le haut ; une droite le décrirait mal.

Réponse. a) différences non constantes, quotients constants ($\times 2$) · b) non, modèle géométrique $y = 2^x$.

Correction de l'exercice 9 - Problème : étalonnage d'un capteur

a) $\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5$ bars.

— $\bar{y} = \frac{0,52 + 0,98 + 1,51 + 2,02 + 2,48 + 3,01}{6} = \frac{10,52}{6} \approx 1,753$ V.

— Point moyen : $G(3,5 ; \approx 1,753)$.

b) $y = 0,4989 \times 4,5 + 0,0073 = 2,245 + 0,007 \approx 2,25$ V.

c) On résout $0,4989x + 0,0073 = 3$:

— $0,4989x = 2,9927$, donc $x \approx 6,00$ bars.

— Le capteur sature donc à environ 6 bars, ce qui correspond au haut de la plage d'étalonnage.

Réponse. a) $G(3,5 ; \approx 1,753)$ · b) $\approx 2,25$ V · c) environ 6 bars.

Correction de l'exercice 10 - Problème : consommation et vitesse

a) $\bar{x} = \frac{70 + 90 + 110 + 130}{4} = \frac{400}{4} = 100$ km/h.

— $\bar{y} = \frac{5,2 + 5,8 + 7,0 + 8,6}{4} = \frac{26,6}{4} = 6,65$ L/100 km.

— Point moyen : $G(100 ; 6,65)$.

b) Les écarts sont +0,6, puis +1,2, puis +1,6 pour des pas de vitesse identiques (20 km/h) : ils **augmentent**.

— Le nuage est donc **incurvé vers le haut** : un ajustement affine donnerait une approximation grossière.

— Physiquement, la résistance de l'air croît avec le carré de la vitesse : un modèle du second degré serait plus adapté.

Réponse. a) $G(100 ; 6,65)$ · b) non, les écarts augmentent : l'ajustement affine est peu adapté.

Correction de l'exercice 11 - Une droite de Mayer

a) La méthode de Mayer partage le relevé, rangé par temps croissants, en deux groupes de même effectif : $G_1\left(\frac{2+4}{2}; \frac{5+9}{2}\right) = G_1(3; 7)$ et $G_2\left(\frac{6+8}{2}; \frac{12+16}{2}\right) = G_2(7; 14)$.

b) La droite passe par G_1 et G_2 :

$$a = \frac{14 - 7}{7 - 3} = 1,75 \quad 7 = 1,75 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 1,75$$

d'où $v = 1,75t + 1,75$. À 5 s, elle donne $1,75 \times 5 + 1,75 = 10,5$ m/s (interpolation). La

penne, 1,75 m/s par seconde, est l'accélération moyenne.

Réponse. a) $G_1(3; 7)$ et $G_2(7; 14)$ · b) $v = 1,75t + 1,75$; environ 10,5 m/s à 5 s.

Correction de l'exercice 12 - Les résidus d'une droite

a) La droite donne 3,1 ; 4,7 ; 6,3 ; 7,9. Les résidus, mesure moins valeur de la droite, valent -0,1 ; 0,3 ; -0,3 ; 0,1.

b) On additionne leurs carrés :

$$S = 0,01 + 0,09 + 0,09 + 0,01 = 0,2$$

Les résidus sont petits et de signes alternés, et leur somme est nulle : les points sont bien répartis de part et d'autre de la droite. Par définition des moindres carrés, aucune autre droite ne donne une somme plus petite que 0,2.

Réponse. a) -0,1 ; 0,3 ; -0,3 ; 0,1 · b) $S = 0,2$: ajustement de bonne qualité.

Correction de l'exercice 13 - Une droite par le point moyen

a) La droite d'ajustement passe par le point moyen. Une droite de pente 2,5 passant par $G(4; 12)$ a pour équation

$$y = 2,5(x - 4) + 12 = 2,5x - 10 + 12 = 2,5x + 2$$

Contrôle : en $x = 4$, $10 + 2 = 12$.

b) Pour $x = 6$: $2,5 \times 6 + 2 = 17$. Inversement, $y = 17$ donne $2,5x + 2 = 17$, soit $x = 6$: les deux questions se répondent. Il faut encore vérifier que $x = 6$ est dans la plage du relevé pour parler d'interpolation.

Réponse. a) $y = 2,5x + 2$ · b) $y = 17$ pour $x = 6$, et réciproquement.

Correction de l'exercice 14 - Un nuage dispersé

a) $2,1 - 3,4 + 0,8 + 3,9 - 2,7 - 0,7 = 0$: la somme est nulle, la droite passe bien par le point moyen. Le plus grand écart vaut 3,9.

b) Des écarts jusqu'à 3,9 pour des mesures entre 10 et 20, cela représente jusqu'à

$$\frac{3,9}{10} \approx 39\%$$

des valeurs mesurées : le nuage est très **dispersé** autour de la droite. Les résidus alternent sans former d'arc, la tendance affine est donc plausible, mais une estimation tirée de la droite peut se tromper de plusieurs unités. Il faut améliorer les mesures ou augmenter leur nombre avant de s'en servir.

Réponse. a) somme nulle, écart maximal 3,9 · b) non : la tendance est plausible mais le nuage trop dispersé pour des estimations précises.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : relevé de production

a) $\bar{x} = \frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6}{5} = \frac{20}{5} = 4.$

— $\bar{y} = \frac{180 + 265 + 340 + 430 + 505}{5} = \frac{1720}{5} = 344$ pièces.

— Point moyen : $G(4; 344)$.

b) $81,5 \times 4 + 18 = 326 + 18 = 344.$

— On retrouve exactement $\bar{y} = 344$: la droite passe bien par G .

c) Pour $x = 7$: $y = 81,5 \times 7 + 18 = 570,5 + 18 = 588,5$, soit environ 588 pièces.

- C'est une **extrapolation** d'un seul opérateur au-delà des relevés : l'estimation reste plausible.
- Réserve pratique : au-delà d'un certain effectif, les postes de travail ou les machines deviennent limitants, et la production cesse de croître proportionnellement.

Réponse. a) $G(4 ; 344)$ · b) $81,5 \times 4 + 18 = 344 = \bar{y}$ · c) ≈ 588 pièces (extrapolation prudente).