

Plaquette 1 – Arithmétiques, géométriques et modèles techniques

Suites numériques — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Suite **arithmétique** de raison r : on **ajoute** r à chaque étape.

$$u_{n+1} = u_n + r \quad u_n = u_0 + nr$$

- Suite **géométrique** de raison q : on **multiplie** par q à chaque étape.

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad u_n = u_0 \times q^n$$

- Reconnaître : différence constante $\Rightarrow$ arithmétique ; quotient constant $\Rightarrow$ géométrique.
- **Modélisation** : $+t\%$ (ou $-t\%$) par étape $\Rightarrow$ géométrique de raison $q = 1 \pm \frac{t}{100}$; $+c$ unités par étape $\Rightarrow$ arithmétique de raison $r = c$.
- Variations : arithmétique croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$; géométrique (termes positifs) croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.
- **Algorithme de seuil** : boucle « tant que » qui avance jusqu'à franchir la valeur visée, avec un compteur.

Correction de l'exercice 1 - Calculer des termes

On applique la relation de récurrence.

- $u_1 = 240 - 18 = 222$;
- $u_2 = 222 - 18 = 204$;
- $u_3 = 204 - 18 = 186$.
- La différence entre deux termes consécutifs est constante et vaut -18 : la suite est **arithmétique** de raison $r = -18$, donc décroissante.

Réponse. 222 ; 204 ; 186 ; arithmétique de raison -18 .

Correction de l'exercice 2 - Reconnaître la nature

- Quotients : $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{36}{12} = 3$, $\frac{108}{36} = 3$: constants. Suite **géométrique** de raison 3.
- Différences : -6 à chaque fois. Suite **arithmétique** de raison -6 .
- Différences : 3, 5, 7 (non constantes) ; quotients : 2,5, 2, 1,7 (non constants). Ni arithmétique, ni géométrique.

Réponse. a) géométrique $q = 3$ · b) arithmétique $r = -6$ · c) ni l'une ni l'autre.

Correction de l'exercice 3 - Formule explicite (arithmétique)

- Pour une suite arithmétique, on ajoute la raison à chaque rang ; au rang n , on l'a ajoutée n fois :

$$u_n = u_0 + nr = 15 + 7n$$

- $u_{20} = 15 + 7 \times 20 = 15 + 140 = 155$.

- On cherche le rang n tel que $15 + 7n = 148$, soit $7n = 133$ et $n = 19$. Le résultat est un entier naturel, donc 148 est bien un terme de la suite. **Vérification** :

$$15 + 7 \times 19 = 148.$$

Réponse. a) $u_n = 15 + 7n$ · b) 155 · c) $n = 19$.

Correction de l'exercice 4 - Formule explicite (géométrie)

a) Pour une suite géométrique, on passe d'un terme au suivant en multipliant par q ; au rang n , on a multiplié n fois :

$$v_n = v_0 \times q^n = 800 \times 0,9^n$$

b) $0,9^5 = 0,59049$, donc $v_5 = 800 \times 0,59049 \approx 472,39$.

c) $q = 0,9 = 1 - 0,1$: multiplier par $0,9$, c'est retirer 10% . Chaque étape correspond à une **baisse de** 10% .

Réponse. a) $v_n = 800 \times 0,9^n$ · b) $v_5 = 472,39$ · c) -10% par étape.

Correction de l'exercice 5 - Modéliser un refroidissement

a) Perdre 15% revient à multiplier par $1 - 0,15 = 0,85$ chaque minute : la suite (T_n) est géométrique de raison $0,85$ et de premier terme 360 ,

$$T_n = 360 \times 0,85^n$$

b) $0,85^3 = 0,614125$, donc $T_3 = 360 \times 0,614125 \approx 221,1$ °C.

c) Non : $0,85^n$ est toujours strictement positif, donc $T_n > 0$ pour tout n . La température se rapproche de 0 sans l'atteindre ; en réalité, la pièce se stabilise à la température ambiante, ce que ce modèle simplifié ne prévoit pas.

Réponse. a) $T_n = 360 \times 0,85^n$ · b) $\approx 221,1$ °C · c) non, elle reste strictement positive.

Correction de l'exercice 6 - Modéliser une cadence de production

a) La production augmente d'une **valeur fixe**, 35 pièces par heure : suite arithmétique de raison 35 et de premier terme 320 , donc $p_n = 320 + 35n$.

b) La sixième heure correspond au rang $n = 5$: $p_5 = 320 + 175 = 495$ pièces.

c) On calcule les six premiers termes, de p_0 à p_5 , puis on les additionne :

$$320 + 355 + 390 + 425 + 460 + 495 = 2445$$

La chaîne produit **2445 pièces** en six heures, soit en moyenne $407,5$ pièces par heure, la moyenne de la première et de la dernière heure.

Réponse. a) $p_n = 320 + 35n$ · b) 495 pièces · c) 2445 pièces.

Correction de l'exercice 7 - Charge d'un condensateur (modèle discret)

a) On applique la relation de récurrence : $u_1 = 0,7 \times 0 + 3,6 = 3,6$ V,
 $u_2 = 0,7 \times 3,6 + 3,6 = 6,12$ V et $u_3 = 0,7 \times 6,12 + 3,6 = 7,884$ V.

b) Les quotients ne sont pas constants ($\frac{6,12}{3,6} = 1,7$, puis $\frac{7,884}{6,12} \approx 1,29$), ni les différences ($3,6$, puis $2,52$) : la suite n'est ni géométrique ni arithmétique.

c) Les gains diminuent à chaque cycle, et les termes semblent se rapprocher de 12 V. On vérifie que 12 V est une valeur stable :

$$0,7 \times 12 + 3,6 = 8,4 + 3,6 = 12$$

C'est la tension d'alimentation : le condensateur se charge vers 12 V sans la dépasser.

Réponse. a) $3,6$; $6,12$; $7,884$ V · b) non · c) vers 12 V.

Correction de l'exercice 8 - Deux termes connus

Entre les rangs 4 et 9, il y a $9 - 4 = 5$ pas : on ajoute cinq fois la raison.

$$u_9 = u_4 + 5r \Leftrightarrow 81 = 46 + 5r \Leftrightarrow r = 7$$

On revient ensuite au premier terme : $u_4 = u_0 + 4r$ donne $46 = u_0 + 28$, soit $u_0 = 18$. La suite s'écrit $u_n = 18 + 7n$.

Vérification : $u_9 = 18 + 9 \times 7 = 81$. Diviser 35 par 9 (le rang) au lieu de 5 (le nombre de pas) serait l'erreur classique.

Réponse. $r = 7$ et $u_0 = 18$.

Correction de l'exercice 9 - Sens de variation

On lit la nature de chaque suite sur sa formule, puis le sens de variation sur la raison.

a) $u_n = 500 - 12n$ est arithmétique de raison $r = -12$: on retire 12 à chaque étape, la suite est **décroissante**.

b) $v_n = 3 \times 1,15^n$ est géométrique de premier terme positif et de raison $1,15 > 1$: **croissante**.

c) $w_n = 2\,000 \times 0,94^n$ est géométrique de premier terme positif et de raison $0 < 0,94 < 1$: **décroissante**, et ses termes se rapprochent de 0.

$$u_{n+1} - u_n = -12 < 0 \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1,15 > 1$$

Réponse. a) décroissante · b) croissante · c) décroissante.

Correction de l'exercice 10 - Algorithme de seuil

On avance **tant que** la température reste supérieure ou égale à 100 °C.

```
def seuil():
    t = 360
    n = 0
    while t >= 100:
        t = t * 0.85
        n = n + 1
    return n
```

— Valeurs calculées : $T_6 \approx 135,8$ °C, $T_7 \approx 115,4$ °C et $T_8 \approx 98,1$ °C.

— La fonction renvoie donc 8 : la température passe sous 100 °C au bout de 8 minutes.

Réponse. 8 minutes ($T_8 \approx 98,1$ °C).

Correction de l'exercice 11 - Représenter une suite géométrique

a) On multiplie par 1,2 à chaque rang : $u_0 = 100$, $u_1 = 120$, $u_2 = 144$, $u_3 = 172,8$ et $u_4 = 207,36$.

b) Les écarts entre deux termes consécutifs valent

$$20 ; 24 ; 28,8 ; 34,56$$

Ils augmentent : quand n augmente de 1, u_n augmente de plus en plus. Les points ne sont **pas** alignés, ils dessinent une courbe qui se redresse.

C'est la différence entre une croissance linéaire (suite arithmétique, écarts constants, points alignés) et une croissance exponentielle (suite géométrique, écarts multipliés à chaque fois par la raison 1,2).

Réponse. a) 100 ; 120 ; 144 ; 172,8 ; 207,36 · b) non : les écarts augmentent.

Correction de l'exercice 12 - Une suite définie par une formule

- a) On remplace n par chaque valeur dans la formule : $u_0 = 5$, $u_1 = 1 - 3 + 5 = 3$, $u_2 = 4 - 6 + 5 = 3$, $u_3 = 9 - 9 + 5 = 5$ et $u_4 = 16 - 12 + 5 = 9$.
- b) La suite diminue de u_0 à u_1 , reste égale de u_1 à u_2 , puis augmente : elle n'est **ni croissante ni décroissante** sur l'ensemble des rangs. Elle est croissante à partir du rang 2.
- c) Les différences valent $-2, 0, 2, 4$: elles ne sont pas constantes, la suite n'est pas arithmétique. Les quotients

$$\frac{3}{5} = 0,6 \quad \frac{3}{3} = 1$$

ne sont pas égaux : elle n'est pas géométrique non plus.

Réponse. a) 5 ; 3 ; 3 ; 5 ; 9 · b) ni l'un ni l'autre (croissante à partir du rang 2) · c) ni arithmétique ni géométrique.

Correction de l'exercice 13 - Calculer des termes au tableur

- a) Chaque terme se calcule à partir du précédent, situé une ligne au-dessus : en B3, on saisit $=2*B2-3$, puis on recopie vers le bas. La référence relative B2 devient B3, B4... à chaque ligne.
- b) On applique la relation de proche en proche :

$$u_1 = 2 \times 4 - 3 = 5 \quad u_2 = 2 \times 5 - 3 = 7$$

puis $u_3 = 2 \times 7 - 3 = 11$ et $u_4 = 2 \times 11 - 3 = 19$.

Les écarts (1, 2, 4, 8) doublent à chaque rang : la suite n'est pas arithmétique ; les quotients (1,25 ; 1,4...) ne sont pas constants : elle n'est pas géométrique.

Réponse. a) $=2*B2-3$ · b) 5 ; 7 ; 11 ; 19.

Correction de l'exercice 14 - Quand une suite en dépasse une autre

- a) $a_{10} = 200 + 200 = 400$ et $b_{10} = 80 \times 1,15^{10} \approx 323,64$: A est encore devant.
- b) On fait avancer les deux suites ensemble tant que B ne dépasse pas A :

```
def rang():
```

```
    a = 200
    b = 80
    n = 0
    while b <= a:
        a = a + 20
        b = b * 1.15
        n = n + 1
    return n
```

Au rang 12, $a_{12} = 440$ et $b_{12} \approx 428,02$: A est encore devant. Au rang 13,

$$a_{13} = 460 \quad b_{13} = 80 \times 1,15^{13} \approx 492,22$$

La fonction renvoie 13 : la croissance exponentielle de B finit par dépasser la croissance linéaire de A.

Réponse. a) 400 contre environ 323,64 · b) au rang 13.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : comparer deux modèles

- a) Machine A : perte en valeur fixe, suite **arithmétique** : $A_n = 20\,000 - 1\,800n$.

— Machine B : perte en pourcentage, suite **géométrique** : $B_n = 20\,000 \times 0,88^n$.

b) Au bout de 3 ans :

— $A_3 = 20\,000 - 5\,400 = 14\,600$ €.

— $B_3 = 20\,000 \times 0,88^3 = 20\,000 \times 0,681\,472 \approx 13\,629$ €. La machine **A** vaut plus.

Au bout de 8 ans :

— $A_8 = 20\,000 - 14\,400 = 5\,600$ €.

— $B_8 = 20\,000 \times 0,88^8 \approx 20\,000 \times 0,359\,635 \approx 7\,193$ €. La machine **B** vaut plus.

— Explication : la perte de B est proportionnelle à sa valeur, donc de plus en plus faible en euros, tandis que celle de A reste de 1 800 € par an.

Réponse. b) À 3 ans : A (14 600 € contre $\approx 13\,629$ €) · à 8 ans : B ($\approx 7\,193$ € contre 5 600 €).