

Plaquette 5 – Modéliser une situation technique

Suites numériques — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois modèles.

Situation	Relation	Nature
$+c$ unités par étape	$u_{n+1} = u_n + c$	arithmétique
$\times q$ par étape	$u_{n+1} = q u_n$	géométrique
pertes et apports	$u_{n+1} = a u_n + b$	mixte

Un modèle mixte n'a pas de formule explicite au programme. On calcule ses termes de proche en proche : à la main, au tableur (recopie vers le bas) ou avec une boucle Python. Pour chercher un seuil, on itère jusqu'à le franchir.

Une valeur stable. Une valeur x est stable si elle ne change pas quand on applique la relation :

$$a x + b = x$$

Par exemple, pour $u_{n+1} = 0,8 u_n + 150$, la valeur 750 est stable, car $0,8 \times 750 + 150 = 750$: les pertes compensent exactement les apports.

Lectures physiques courantes.

Modèle	Valeur stable
refroidissement	la température ambiante
charge d'un condensateur	la tension du générateur
cuve avec fuite	le niveau où fuite = apport
stock avec réapprovisionnement	le stock stable

⚠ Quand $0 < a < 1$, les termes se rapprochent de la valeur stable **sans l'atteindre** : un seuil situé au-delà ne sera jamais franchi, et une boucle *while* qui le vise ne s'arrête pas.

Correction de l'exercice 1 - Choisir le modèle

On repère, dans chaque situation, ce qui se répète à chaque étape : un ajout fixe, un facteur, ou les deux.

a) Perdre 5 % revient à multiplier par 0,95, puis on ajoute 200 L : $v_{n+1} = 0,95 v_n + 200$. La suite n'est ni arithmétique ni géométrique (modèle mixte).

b) On ajoute 80 unités à chaque cycle, sans pourcentage : $c_{n+1} = c_n + 80$, suite **arithmétique** de raison 80.

c) Diviser par 1,6 revient à multiplier par $\frac{1}{1,6} = 0,625$:

$$a_{n+1} = 0,625 a_n$$

suite **géométrique** de raison 0,625, soit $-37,5\%$ par oscillation.

Réponse. a) $v_{n+1} = 0,95 v_n + 200$, mixte · b) $c_{n+1} = c_n + 80$, arithmétique · c)

$a_{n+1} = 0,625a_n$, géométrique.

Correction de l'exercice 2 - Une dilution successive

a) Garder un quart de la concentration revient à multiplier par 0,25 : suite géométrique,

$$c_n = 120 \times 0,25^n$$

b) $c_3 = 120 \times 0,015625 = 1,875$ g/L et $c_5 = 120 \times 0,25^5 \approx 0,12$ g/L. **Contrôle** de proche en proche : 30 ; 7,5 ; 1,875 ; 0,47 ; 0,12.

c) Chaque terme est le quart du précédent, et le quart d'un nombre positif reste positif : la concentration ne s'annule **jamais**. Elle devient en revanche très petite : il suffit de 7 dilutions pour passer sous 0,01 g/L, car $120 \times 0,25^6 \approx 0,029$ et $120 \times 0,25^7 \approx 0,0073$.

Réponse. a) $c_n = 120 \times 0,25^n$ · b) 1,875 et $\approx 0,12$ g/L · c) non, elle tend vers 0.

Correction de l'exercice 3 - Amortissement de vibrations

a) Réduire l'amplitude de 40 % revient à la multiplier par 0,6 : $a_n = 48 \times 0,6^n$.

b) $a_3 = 48 \times 0,6^3 = 48 \times 0,216 \approx 10,37$ mm.

c) La suite est décroissante ; on cherche le premier n tel que $48 \times 0,6^n < 5$. Après 4 oscillations, l'amplitude vaut environ 6,22 mm, encore au-dessus ; après 5 oscillations,

$$48 \times 0,6^5 \approx 3,73 \text{ mm}$$

Il faut 5 **oscillations**. L'amplitude est divisée par deux environ toutes les deux oscillations ($0,6^2 = 0,36$).

Réponse. a) $a_n = 48 \times 0,6^n$ · b) 10,37 mm · c) 5 oscillations.

Correction de l'exercice 4 - Une concentration qui se stabilise

a) On applique la relation de proche en proche : $d_1 = 0,4 \times 0 + 300 = 300$ mg, $d_2 = 0,4 \times 300 + 300 = 420$ mg et $d_3 = 0,4 \times 420 + 300 = 468$ mg.

b) De même, $d_4 = 487,2$ mg et $d_5 = 494,88$ mg. Les gains successifs (300, 120, 48, 19,2...) sont chaque fois multipliés par 0,4 : la dose augmente de moins en moins et semble se stabiliser vers 500 mg. On vérifie que 500 mg est une dose stable :

$$0,4 \times 500 + 300 = 200 + 300 = 500$$

À 500 mg, l'élimination de 60 % (300 mg) compense exactement l'apport.

Réponse. a) 300 ; 420 ; 468 mg · b) 487,2 et 494,88 mg ; la dose se stabilise vers 500 mg, car $0,4 \times 500 + 300 = 500$.

Correction de l'exercice 5 - Un stock à piloter

a) $s_1 = 0,8 \times 2\,000 + 150 = 1\,750$ pièces et $s_2 = 0,8 \times 1\,750 + 150 = 1\,550$ pièces.

b) Si le stock vaut 750 pièces une semaine, il vaut la semaine suivante

$$0,8 \times 750 + 150 = 600 + 150 = 750$$

Il ne bouge plus : les 20 % perdus (150 pièces) sont exactement compensés par la livraison.

c) On poursuit le calcul : 1 390 ; 1 262 ; 1 159,60 ; 1 077,68 ; 1 012,14 au rang 7, encore au-dessus de 1 000, puis 959,72 au rang 8. Le stock passe sous 1 000 pièces au bout de 8 **semaines**. Pour garder un stock de 1 200 pièces, il faudrait livrer $0,2 \times 1\,200 = 240$ pièces par semaine.

Réponse. a) 1750 et 1550 · b) $0,8 \times 750 + 150 = 750$ · c) 8 semaines.

Correction de l'exercice 6 - Un parc de composants

a) $p_1 = 0,88 \times 5\,000 + 900 = 5\,300$ et $p_2 = 0,88 \times 5\,300 + 900 = 5\,564$ composants.

b) Avec un parc de 7 500 composants, on en perd 12 %, soit 900, et l'on en reçoit 900 :
 $0,88 \times 7\,500 + 900 = 6\,600 + 900 = 7\,500$

Le parc est stable à 7 500 composants.

c) Partant de 5 000, sous ce niveau stable, le parc **croît** : 5 300, 5 564, 5 796... Les gains (300, 264, 232...) sont multipliés par 0,88 chaque année, la croissance ralentit, et le parc se rapproche de 7 500 sans l'atteindre (environ 6 601 au rang 8). Pour garder le parc à 5 000, il suffirait de $0,12 \times 5\,000 = 600$ livraisons par an.

Réponse. a) 5300 et 5564 · b) $0,88 \times 7\,500 + 900 = 7\,500$ · c) il croît en se rapprochant de 7500.

Correction de l'exercice 7 - Une cadence avec pertes

a) $c_1 = 0,9 \times 600 + 80 = 620$, $c_2 = 0,9 \times 620 + 80 = 638$ et $c_3 = 0,9 \times 638 + 80 = 654,20$ pièces.

b) Avec une cadence de 800 pièces, l'usure en retire 10 %, soit 80, et le réglage en ajoute 80 :

$$0,9 \times 800 + 80 = 720 + 80 = 800$$

La cadence est stable à 800 pièces. Partant de 600, elle augmente de moins en moins vite vers ce niveau (environ 714 au rang 8). Pour stabiliser la cadence à 900 pièces, il faudrait gagner $0,1 \times 900 = 90$ pièces par réglage, soit 10 de plus qu'aujourd'hui.

Réponse. a) 620 ; 638 ; 654,20 · b) $0,9 \times 800 + 80 = 800$.

Correction de l'exercice 8 - Ni arithmétique ni géométrique

a) On calcule les premiers termes : $s_0 = 2\,000$, $s_1 = 1\,750$, $s_2 = 1\,550$ et $s_3 = 1\,390$.

b) Les différences valent -250, -200 et -160 : elles ne sont pas constantes, la suite n'est **pas arithmétique**.

c) Les quotients valent

$$\frac{1\,750}{2\,000} = 0,875 \quad \frac{1\,550}{1\,750} \approx 0,886$$

ils ne sont pas égaux, la suite n'est **pas géométrique** non plus.

On ne peut donc calculer ses termes que par la relation de récurrence, à la main, au tableur ou avec une boucle. Les différences, en revanche, sont multipliées par 0,8 à chaque étape : la baisse ralentit.

Réponse. a) 1750 ; 1550 ; 1390 · b) non (différences -250, -200, -160) · c) non (quotients 0,875 et $\approx 0,886$).

Correction de l'exercice 9 - Un budget de maintenance

a) $b_1 = 1,04 \times 12\,000 - 2\,000 = 10\,480$ € et $b_2 = 1,04 \times 10\,480 - 2\,000 = 8\,899,20$ €.

b) On poursuit le calcul de proche en proche :

$$7\,255,17 ; 5\,545,37 ; 3\,767,19 ; 1\,917,88 ; -5,41$$

Le budget devient négatif au rang 7 : il est épuisé au bout de 7 **ans**. Chaque année, les intérêts (4 % d'un budget qui fond) couvrent une part de plus en plus faible de la ponction.

c) Pour que le budget reste constant, la ponction doit être égale aux intérêts de la première année : $0,04 \times 12\,000 = 480$ €. **Vérification** : $1,04 \times 12\,000 - 480 = 12\,000$.

Réponse. a) 10 480 € et 8899,20 € · b) 7 ans · c) 480 € par an.

Correction de l'exercice 10 - Dimensionner un apport

a) Chaque jour, le bassin garde 85 % de son volume puis reçoit l'apport b :

$v_{n+1} = 0,85 v_n + b$. Pour que le volume reste à 9 000 L, il faut

$$9\,000 = 0,85 \times 9\,000 + b \Rightarrow b = 9\,000 - 7\,650 = 1\,350 \text{ L}$$

L'apport doit remplacer exactement ce qui part : 15 % de 9 000 L, soit 1 350 L par jour.

b) **Vérification** : $0,85 \times 9\,000 + 1\,350 = 9\,000$. Si le bassin contient plus, par exemple 12 000 L, il passe à 11 550 L : il baisse. S'il contient moins, par exemple 6 000 L, il passe à 6 450 L : il monte. Pour un niveau de 15 000 L, il faudrait 2 250 L par jour.

Réponse. a) 1350 L par jour · b) $0,85 \times 9000 + 1350 = 9000$.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

L'élève ignore le terme +80 : la suite n'est **pas** géométrique. Avec $u_0 = 600$, on obtient $u_1 = 540 + 80 = 620$ et $u_2 = 558 + 80 = 638$. Les quotients

$$\frac{620}{600} \approx 1,033 \quad \frac{638}{620} \approx 1,029$$

ne sont pas égaux, et les différences (20 puis 18) non plus : la suite n'est ni géométrique ni arithmétique.

Surtout, elle **augmente** au lieu de tendre vers 0 : l'apport de 80 dépasse la perte tant que 10 % de u_n reste inférieur à 80, c'est-à-dire tant que $u_n < 800$. La suite se rapproche de 800. Avant de conclure, on repère toujours le terme constant.

Réponse. Le terme +80 change tout : la suite croît vers 800, elle ne tend pas vers 0.

Correction de l'exercice 12 - Comparer deux dispositifs

a) Pour le dispositif A, un niveau x est stable si $x = 0,8x + 150$, soit $0,2x = 150$ et $x = 750$. Pour B, $x = 0,9x + 90$ donne $0,1x = 90$ et $x = 900$.

$$x_A = 750 \quad x_B = 900$$

b) Le dispositif **B** maintient le niveau le plus élevé, alors que son apport est plus faible ($90 < 150$) : ses pertes sont deux fois moins fortes. Pour que A atteigne 900, il faudrait un apport de $0,2 \times 900 = 180$, soit 30 de plus. Réduire les pertes est souvent plus efficace qu'augmenter les apports.

Réponse. a) 750 et 900 · b) le dispositif B, grâce à ses pertes deux fois plus faibles.

Correction de l'exercice 13 - Un seuil à atteindre

Le modèle n'a pas de formule explicite au programme : on calcule les termes de proche en proche. $p_1 = 5\,300$, $p_2 = 5\,564$, $p_3 \approx 5\,796,32$, $p_4 \approx 6\,000,76$, $p_5 \approx 6\,180,67$, $p_6 \approx 6\,338,99$, puis

$$p_7 \approx 6\,478,31 < 6\,500 < p_8 \approx 6\,600,91$$

On dépasse 6 500 composants au bout de 8 **ans**. Le programme correspondant :

```
def seuil():
    p = 5000
    n = 0
    while p < 6500:
```

```

    p = p * 0.88 + 900
    n = n + 1
return n

```

renvoie 8. Un seuil de 7 500 ne serait jamais atteint : la boucle tournerait sans fin.

Réponse. 8 ans, avec ≈ 6601 composants.

Correction de l'exercice 14 - Modéliser un refroidissement

a) L'écart initial vaut $85 - 20 = 65$ °C et diminue de 15 % par minute : il est multiplié par 0,85. La suite (e_n) est géométrique,

$$e_{n+1} = 0,85 e_n \quad e_n = 65 \times 0,85^n$$

b) Comme $T_n = e_n + 20$, on a

$$T_{n+1} = 0,85(T_n - 20) + 20 = 0,85 T_n - 17 + 20 = 0,85 T_n + 3.$$

c) $T_1 = 65 \times 0,85 + 20 = 75,25$ °C et $T_5 = 65 \times 0,85^5 + 20 \approx 28,84 + 20 = 48,84$ °C, comme avec la relation de récurrence.

Passer par l'écart, qui est géométrique, donne une formule explicite pour la température : la pièce se rapproche de 20 °C sans l'atteindre.

Réponse. a) $e_{n+1} = 0,85 e_n$ · b) $T_{n+1} = 0,85 T_n + 3$ · c) 75,25 °C et $\approx 48,84$ °C.

Correction de l'exercice 15 - Choisir un dimensionnement

a) Chaque passage laisse passer 25 % des particules, donc après n passages il en reste la fraction $0,25^n$. On veut en retenir au moins 99,9 %, c'est-à-dire en laisser passer au plus 0,1 % :

$$0,25^n \leq 0,001$$

Avec 4 passages, $0,25^4 \approx 0,0039$: on ne retient que 99,61 %. Avec 5 passages, $0,25^5 \approx 0,00098$. Il faut 5 **passages**.

b) Il reste alors environ 0,098 % des particules (rétention de 99,90 %). Additionner 5×75 % n'aurait aucun sens. Les derniers pourcents coûtent cher : pour 99,99 %, il faudrait 7 passages.

Réponse. a) 5 passages · b) il reste $\approx 0,098$ % des particules.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une régulation

a) On applique la relation : $u_1 = 0,75 \times 800 + 120 = 720$, $u_2 = 0,75 \times 720 + 120 = 660$ et $u_3 = 0,75 \times 660 + 120 = 615$.

b) Si $u_n = 480$, alors $u_{n+1} = 0,75 \times 480 + 120 = 360 + 120 = 480$: la valeur 480 est stable.

c) Les différences valent -80 , -60 et -45 : elles ne sont pas constantes, la suite n'est pas arithmétique. Les quotients $\frac{720}{800} = 0,9$ et $\frac{660}{720} \approx 0,917$ ne sont pas égaux : elle n'est pas géométrique.

d) On poursuit de proche en proche :

$$581,25 ; 555,94 ; 536,95 ; 522,71 ; 512,04 ; 504,03 ; 498,02$$

La suite passe sous 500 au rang 10 : il faut 10 **étapes**. Elle se rapproche ensuite de 480 sans l'atteindre.

Réponse. a) 720 ; 660 ; 615 · b) $0,75 \times 480 + 120 = 480$ · c) ni l'une ni l'autre · d) 10 étapes.