

Plaquette 2 – Suites arithmétiques en situation technique

Suites numériques – Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition.

$$u_{n+1} = u_n + r \quad r = u_{n+1} - u_n$$

Terme général.

$$u_n = u_0 + nr$$

Si l'on connaît u_1 plutôt que u_0 :

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Reconnaître. Les différences successives sont **toutes égales**. On les calcule toujours avant de conclure.

Deux termes connus.

$$r = \frac{u_p - u_n}{p - n}$$

△ Le dénominateur est le nombre de **pas**, pas un rang.

Variations.

Signe de r	Suite
$r > 0$	croissante
$r < 0$	décroissante

Représentation graphique. Les points $(n; u_n)$ d'une suite arithmétique sont **alignés** sur la droite $y = rx + u_0$: c'est une croissance linéaire.

Démontrer. Pour prouver qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout n et l'on montre que le résultat ne dépend pas de n . Un contre-exemple suffit pour prouver qu'elle ne l'est pas.

Seuil. On résout l'inéquation $u_n \geq S$ (ou $\leq$), puis on arrondit à l'entier utile.

Modéliser. « $+c$ unités par étape » donne une arithmétique de raison c . Une évolution en **pourcentage** donnerait une géométrique.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître dans un relevé

a) On calcule les différences entre deux minutes consécutives : $81,5 - 85 = -3,5$, $78 - 81,5 = -3,5$, $74,5 - 78 = -3,5$ et $71 - 74,5 = -3,5$. Elles sont toutes égales : on retire toujours $3,5\text{ °C}$, la suite est **arithmétique**.

b) La raison est la différence constante, $r = -3,5$, et le premier terme vaut $u_0 = 85$. D'où

$$u_n = u_0 + nr = 85 - 3,5n$$

Contrôle : $u_3 = 85 - 10,5 = 74,5$, comme dans le tableau. La raison est négative, la suite est décroissante ; à 10 minutes, le modèle donne 50 °C . Un refroidissement réel ralentit, si bien que ce modèle ne vaut que sur une courte durée.

Réponse. a) oui · b) $r = -3,5$ et $u_n = 85 - 3,5n$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer des termes

a) La cadence augmente du même nombre de pièces chaque mois : la suite est arithmétique de raison 24 et de premier terme $p_0 = 320$, donc

$$p_n = 320 + 24n$$

b) $p_5 = 320 + 24 \times 5 = 440$ pièces et $p_{12} = 320 + 24 \times 12 = 608$ pièces.

Contrôle de proche en proche : 344, 368, 392, et la formule donne bien $p_3 = 392$. Entre les rangs 5 et 12, il y a 7 pas de 24, soit 168 pièces : $608 - 440 = 168$. Attention, le premier mois est le rang 0 ; le rang 12 est donc le treizième mois.

Réponse. a) $p_n = 24n + 320$ · b) 440 et 608 pièces.

Correction de l'exercice 3 - Deux termes connus

a) Entre u_4 et u_{12} , il y a $12 - 4 = 8$ pas, et la suite a augmenté de $95 - 47 = 48$. Chaque pas vaut donc

$$r = \frac{48}{8} = 6$$

b) $u_4 = u_0 + 4r$, soit $47 = u_0 + 24$, donc $u_0 = 23$ et $u_n = 6n + 23$. **Vérification :**
 $u_{12} = 72 + 23 = 95$.

c) $u_{20} = 6 \times 20 + 23 = 143$. **Contrôle** depuis u_{12} : $95 + 8 \times 6 = 143$.

Diviser 48 par 12 (le rang) au lieu de 8 (le nombre de pas) donnerait $r = 4$, et l'on vérifie que $47 + 8 \times 4 = 79 \neq 95$.

Réponse. a) $r = 6$ · b) $u_0 = 23$ et $u_n = 6n + 23$ · c) $u_{20} = 143$.

Correction de l'exercice 4 - Franchir un seuil

On cherche le premier rang n tel que $85 - 3,5n < 25$:

$$85 - 3,5n < 25 \Leftrightarrow 60 < 3,5n \Leftrightarrow n > \frac{60}{3,5} \approx 17,14$$

Le plus petit entier qui convient est $n = 18$. **Vérification** : à la minute 17, la température vaut $85 - 59,5 = 25,5$ °C, encore au-dessus ; à la minute 18, elle vaut $85 - 63 = 22$ °C.

On a évité la division par un nombre négatif en passant $3,5n$ de l'autre côté ; si l'on divise par $-3,5$, il faut inverser le sens de l'inégalité. Le modèle prévoirait 0 °C vers la minute 24 : en réalité, la température s'arrête à celle du local.

Réponse. Au bout de 18 minutes (22 °C, contre 25,5 °C à la minute 17).

Correction de l'exercice 5 - Représenter une suite arithmétique

a) On remplace n par 0, 1, 2, 3 et 4 dans $p_n = 24n + 320$:

n	0	1	2	3	4
p_n	320	344	368	392	416

b) Les points $(n ; p_n)$ sont **alignés** : chaque fois que n augmente de 1, p_n augmente de 24. Ils sont sur la droite d'équation

$$y = 24x + 320$$

dont le coefficient directeur est la raison 24 et l'ordonnée à l'origine le premier terme 320. C'est le signe d'une croissance linéaire : une suite arithmétique se représente par des points alignés.

Réponse. a) 320 ; 344 ; 368 ; 392 ; 416 · b) ils sont alignés sur la droite $y = 24x + 320$.

Correction de l'exercice 6 - Un remplissage

a) Le volume augmente de 45 L chaque minute, à partir de 150 L : suite arithmétique de raison 45, $v_n = 45n + 150$.

b) $v_8 = 45 \times 8 + 150 = 510$ L.

c) On résout

$$45n + 150 = 1\,500 \Leftrightarrow 45n = 1\,350 \Leftrightarrow n = 30$$

La cuve atteint 1 500 L au bout de 30 **minutes**. **Vérification** : $45 \times 30 + 150 = 1\,500$.

Le débit vaut $45 \times 60 = 2\,700$ L/h, soit 2,7 m³/h. Si la cuve contient 2 000 L au plus, elle déborde entre la 41^e et la 42^e minute ($n \approx 41,1$).

Réponse. a) $v_n = 45n + 150$ · b) 510 L · c) 30 minutes.

Correction de l'exercice 7 - Amortissement linéaire

a) La machine perd chaque année le même montant, 2 250 € : sa valeur forme une suite arithmétique de raison $-2\,250$, $v_n = 18\,000 - 2\,250n$.

b) $v_4 = 18\,000 - 9\,000 = 9\,000$ € : la moitié de la valeur d'achat.

c) La machine est totalement amortie lorsque sa valeur s'annule :

$$18\,000 - 2\,250n = 0 \Leftrightarrow n = \frac{18\,000}{2\,250} = 8$$

La durée d'amortissement est de 8 **ans** : chaque année, on amortit $\frac{1}{8} = 12,5\%$ de la valeur d'origine. Avec un amortissement de 25 % par an de la valeur restante (suite géométrique), la machine vaudrait environ 5 695 € au bout de 4 ans, mais ne serait jamais nulle.

Réponse. a) $v_n = 18\,000 - 2\,250n$ · b) 9000 € · c) 8 ans.

Correction de l'exercice 8 - Résistances en série

a) En série, les résistances s'ajoutent : chaque étage ajoute 22 Ω à partir de 47 Ω . La suite est arithmétique, $R_n = 22n + 47$.

b) $R_5 = 22 \times 5 + 47 = 157$ Ω .

c) On cherche le premier n tel que

$$22n + 47 > 300 \Leftrightarrow 22n > 253 \Leftrightarrow n > 11,5$$

Il faut 12 **étages**. **Vérification** : $R_{11} = 289$ Ω , encore insuffisant, et $R_{12} = 311$ Ω .

En parallèle, ce sont les inverses qui s'ajoutent ($\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$) : la résistance totale diminue, et le modèle n'est plus arithmétique.

Réponse. a) $R_n = 22n + 47$ · b) 157 Ω · c) 12 étages.

Correction de l'exercice 9 - Sens de variation

Une suite de la forme $u_n = an + b$ est arithmétique de raison a : on passe d'un terme au suivant en ajoutant a . Le signe de la raison donne le sens de variation.

a) $u_n = 7n - 12$: $r = 7 > 0$, la suite est **croissante**. **Contrôle** : $u_1 = -5$, $u_2 = 2$, l'écart vaut 7.

b) $v_n = 250 - 18n$: $r = -18 < 0$, la suite est **décroissante** ; ses termes deviennent négatifs à partir du rang 14 ($v_{14} = -2$).

c) $w_n = 43 : r = 0$, la suite est **constante**.

$$r > 0 : \text{croissante} \quad r < 0 : \text{décroissante} \quad r = 0 : \text{constante}$$

Réponse. a) $r = 7$, croissante · b) $r = -18$, décroissante · c) $r = 0$, constante.

Correction de l'exercice 10 - Comparer deux modèles

a) Les deux productions sont arithmétiques : $a_n = 35n + 500$ et $b_n = 15n + 800$. Au bout de 10 mois, $a_{10} = 850$ et $b_{10} = 950$ pièces : B est encore devant de 100 pièces.

b) On cherche le rang où les deux productions sont égales :

$$35n + 500 = 15n + 800 \Leftrightarrow 20n = 300 \Leftrightarrow n = 15$$

Au rang 15, les deux ateliers produisent 1 025 pièces ; au rang 16, A produit 1 060 pièces et B 1 040 : A est passé devant.

On pouvait aussi raisonner directement : A rattrape 20 pièces par mois sur un retard initial de 300, il lui faut $\frac{300}{20} = 15$ mois.

Réponse. a) 850 contre 950 · b) égalité au rang 15 (1025 pièces), A devant ensuite.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

L'élève a divisé par le rang 9 au lieu du nombre de **pas** entre les deux termes. De u_3 à u_9 , il y a $9 - 3 = 6$ pas, donc

$$r = \frac{59 - 29}{9 - 3} = \frac{30}{6} = 5$$

Vérification : $29 + 6 \times 5 = 59$, alors qu'avec $r \approx 3,33$ on trouverait environ 49, loin de 59.

Ensuite, $u_0 = u_3 - 3r = 29 - 15 = 14$, d'où $u_n = 5n + 14$. En général, $r = \frac{u_p - u_k}{p - k}$: on compte les pas sur un petit schéma.

Réponse. $r = \frac{59 - 29}{9 - 3} = 5$, et $u_n = 5n + 14$.

Correction de l'exercice 12 - Une cote d'usinage

a) Chaque passe enlève 0,8 mm : la cote forme une suite arithmétique de raison $-0,8$, $c_n = 42 - 0,8n$.

b) On résout

$$42 - 0,8n = 33,6 \Leftrightarrow 0,8n = 8,4 \Leftrightarrow n = 10,5$$

Ce n'est pas un entier : la cote visée n'est pas atteignable en passes entières. Après 10 passes, la cote vaut 34 mm ; après 11, elle vaudrait 33,2 mm, trop faible. La solution pratique consiste à faire 10 passes de 0,8 mm puis une passe de finition de 0,4 mm (ou 11 passes d'environ 0,764 mm).

Réponse. a) $c_n = 42 - 0,8n$ · b) 10,5 passes : 10 passes puis une finition de 0,4 mm.

Correction de l'exercice 13 - Un empilement

a) La rangée du bas est le rang 0, la neuvième rangée le rang 8. Avec $t_n = 32 - 2n$:

$$t_8 = 32 - 16 = 16 \text{ tubes}$$

b) Une rangée doit contenir au moins un tube : $32 - 2n \geq 1$, soit $n \leq 15,5$. Le dernier rang possible est $n = 15$, avec 2 tubes : il y a 16 **rangées** (rangs 0 à 15). Les effectifs sont tous pairs, on n'atteint donc jamais 1 tube.

c) On calcule la différence entre deux rangées consécutives :

$t_{n+1} - t_n = (32 - 2(n+1)) - (32 - 2n) = -2$. Elle ne dépend pas de n : la suite (t_n) est **arithmétique** de raison -2 .

Réponse. a) 16 tubes · b) 16 rangées · c) $t_{n+1} - t_n = -2$ pour tout n .

Correction de l'exercice 14 - Modéliser ou pas

Le critère est simple : une quantité **fixe** qui s'ajoute ou se retire donne une suite arithmétique ; un **pourcentage** donne une suite géométrique.

a) Le compteur avance de 1 unité par pièce : arithmétique de raison 1.

b) Une population qui croît de 2 % par an est multipliée par 1,02 : géométrique, **pas** arithmétique.

c) Le réservoir perd 12 L par heure : arithmétique de raison -12 , valable pour une pompe à débit constant (un écoulement par gravité ralentit).

d) Un capital placé à 3 % est multiplié par 1,03 : géométrique.

$$10\,000 \times 1,03^{20} \approx 18\,061 \text{ €}$$

Avec 300 € ajoutés chaque année, on n'aurait que 16 000 € : le choix du modèle change le résultat.

Réponse. a) et c) arithmétique · b) et d) géométrique.

Correction de l'exercice 15 - Démontrer qu'une suite est arithmétique

a) On calcule la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = (6(n+1) + 23) - (6n + 23) = 6$$

Elle vaut toujours 6, quel que soit n : la suite (u_n) est **arithmétique** de raison 6 et de premier terme $u_0 = 23$.

b) Pour $v_n = n^2 + 1$, on calcule $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 5$, $v_3 = 10$. Les différences valent 1, 3 et 5 : elles ne sont pas constantes, la suite (v_n) n'est **pas** arithmétique. Il suffit d'un contre-exemple pour le prouver, alors qu'il faut un calcul valable pour tout n pour prouver qu'une suite est arithmétique.

Réponse. a) $u_{n+1} - u_n = 6$: arithmétique de raison 6 · b) non (1, 3, 5 ne sont pas égaux).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un banc d'essai

a) La charge diminue de 2,4 kN à chaque cycle, à partir de 60 kN : suite arithmétique de raison $-2,4$,

$$c_n = 60 - 2,4n$$

b) On résout $60 - 2,4n = 24$, soit $2,4n = 36$ et $n = 15$ cycles. **Vérification** : $60 - 36 = 24$.

c) On cherche le premier n tel que $60 - 2,4n < 10$, soit $2,4n > 50$ et $n > 20,83$. La charge passe sous 10 kN au bout de 21 **cycles** : $c_{20} = 12$ kN et $c_{21} = 9,6$ kN.

La charge s'annulerait au rang $\frac{60}{2,4} = 25$: le modèle n'a plus de sens au-delà.

Réponse. a) $c_n = 60 - 2,4n$ · b) 15 cycles · c) 21 cycles (9,6 kN).