

Plaquette 3 – Suites géométriques et atténuations

Suites numériques – Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition.

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Reconnaître. Les **quotients** successifs sont tous égaux :

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Du pourcentage à la raison.

Énoncé	Raison
+6 % par étape	1,06
–15 % par étape	0,85
atténuation de 30 %	0,7

Raison à partir de deux termes.

$$q^{p-n} = \frac{u_p}{u_n}$$

Variations (termes positifs).

Valeur de q	Suite
$q > 1$	croissante
$0 < q < 1$	décroissante, elle tend vers 0

⚠ Une suite géométrique à termes positifs ne s'annule **jamais**.

Démontrer. Pour prouver qu'une suite à termes positifs est géométrique, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et l'on montre qu'il ne dépend pas de n .

Demi-vie et doublement. On cherche le plus petit n tel que $q^n \leq 0,5$ ou $q^n \geq 2$, par balayage. Repère : la règle des 70 donne $n \approx \frac{70}{t}$.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître dans un relevé

a) On calcule les quotients de deux amplitudes consécutives : $\frac{1,70}{2} = 0,85$, $\frac{1,445}{1,70} = 0,85$ et $\frac{1,228}{1,445} \approx 0,85$. On multiplie toujours par 0,85 : la suite est **géométrique**. Les différences (–0,30, –0,255, –0,217) ne sont pas constantes, elle n'est donc pas arithmétique.

b) La raison vaut $q = 0,85$, et le taux d'évolution $q - 1 = -15\%$: chaque étage atténue l'amplitude de 15 %.

$$a_n = 2 \times 0,85^n$$

Contrôle : $a_3 = 2 \times 0,614125 \approx 1,228$. Au cinquième étage, l'amplitude vaudrait environ 0,887.

Réponse. a) oui · b) $q = 0,85$, soit -15% par étage.

Correction de l'exercice 2 - Décharge d'un condensateur

a) Perdre 30% revient à multiplier par $1 - 0,3 = 0,7$: la tension forme une suite géométrique de raison $0,7$ et de premier terme 12 ,

$$u_n = 12 \times 0,7^n$$

b) $u_1 = 12 \times 0,7 = 8,40$ V, $u_2 = 8,4 \times 0,7 = 5,88$ V et $u_5 = 12 \times 0,7^5 \approx 12 \times 0,16807 \approx 2,02$ V.

Contrôle de proche en proche : $4,12$ V, $2,88$ V puis $2,02$ V. Les baisses successives ($-3,6$, $-2,52$, $-1,76$) diminuent : la décharge ralentit. La tension ne s'annule jamais, mais elle devient vite négligeable.

Réponse. a) $u_n = 12 \times 0,7^n$ · b) $8,40$ V, $5,88$ V et $\approx 2,02$ V.

Correction de l'exercice 3 - Un seuil d'atténuation

On cherche le premier n tel que $12 \times 0,7^n < 1$, c'est-à-dire $0,7^n < \frac{1}{12} \approx 0,0833$. La suite est décroissante (raison comprise entre 0 et 1), on teste donc les rangs successifs :

$$12 \times 0,7^6 \approx 1,41 \text{ V} \quad 12 \times 0,7^7 \approx 0,99 \text{ V}$$

La tension passe sous 1 V au bout de **7 intervalles**.

Elle est divisée par deux en 2 intervalles environ ($0,7^2 = 0,49$) ; après 10 intervalles, il reste environ $0,34$ V.

Réponse. 7 intervalles ($\approx 0,99$ V, contre $\approx 1,41$ V au sixième).

Correction de l'exercice 4 - Une production en croissance

a) Une hausse de 6% revient à multiplier par $1,06$ chaque mois : $p_n = 450 \times 1,06^n$.

b) $p_6 = 450 \times 1,06^6 \approx 450 \times 1,4185 \approx 638$ pièces et $p_{12} \approx 450 \times 2,0122 \approx 905$ pièces.

c) La production double lorsque $1,06^n \geq 2$. On teste : $1,06^{11} \approx 1,898$, encore insuffisant, et

$$1,06^{12} \approx 2,012$$

La production double au bout de **12 mois**. En un an, elle augmente donc d'environ 101% , et non de $12 \times 6 = 72\%$: chaque hausse s'applique à une production déjà augmentée.

Réponse. a) $p_n = 450 \times 1,06^n$ · b) ≈ 638 et ≈ 905 · c) au bout de 12 mois.

Correction de l'exercice 5 - Deux termes connus

a) Entre u_2 et u_5 , on multiplie trois fois par la raison : $u_5 = u_2 \times q^3$. Donc

$$q^3 = \frac{2\,488,32}{1\,440} = 1,728 \quad q = 1,2$$

car $1,2^3 = 1,728$.

b) $u_2 = u_0 \times q^2$, soit $1\,440 = u_0 \times 1,44$, d'où $u_0 = 1\,000$. La raison $1,2$ correspond à une hausse de 20% par étape, et $u_n = 1\,000 \times 1,2^n$. **Contrôle** :

$$u_5 = 1\,000 \times 2,48832 = 2\,488,32.$$

Pour une suite géométrique, on **divise** les termes ; soustraire, ou diviser par 5 au lieu de 3 , serait une erreur.

Réponse. a) $q = 1,2$ · b) $u_0 = 1000$, soit $+20\%$ par étape.

Correction de l'exercice 6 - Démontrer qu'une suite est géométrique

a) On calcule le quotient de deux termes consécutifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 1,5^{n+1}}{4 \times 1,5^n} = 1,5$$

Il ne dépend pas de n : on passe toujours d'un terme au suivant en multipliant par 1,5. La suite (u_n) est **géométrique** de raison 1,5 et de premier terme $u_0 = 4$; elle est croissante car $1,5 > 1$.

b) Pour $w_n = n^2 + 1$: $w_1 = 2$, $w_2 = 5$, $w_3 = 10$. Les quotients $\frac{5}{2} = 2,5$ et $\frac{10}{5} = 2$ sont différents : la suite (w_n) n'est **pas** géométrique. Un seul contre-exemple suffit.

Réponse. a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,5$: géométrique de raison 1,5, croissante · b) non.

Correction de l'exercice 7 - Atténuation d'un signal

a) Chaque étage laisse passer 85 % du signal, donc on multiplie par 0,85 à chaque étage. Après 5 étages :

$$0,85^5 \approx 0,4437$$

il reste environ 44,37 % du signal, soit une atténuation de 55,63 %, et non $5 \times 15 = 75\%$.

b) On cherche le premier n tel que $0,85^n < 0,2$: $0,85^9 \approx 0,2316$ est encore trop grand, $0,85^{10} \approx 0,1969$ convient. Il faut 10 **étages**.

Le signal est divisé par deux entre le quatrième et le cinquième étage ; après 20 étages, il n'en reste qu'environ 3,9 %.

Réponse. a) $\approx 44,37\%$ · b) 10 étages.

Correction de l'exercice 8 - Un niveau sonore

a) Réduire de 20 % revient à multiplier par 0,8 à chaque paroi : $90 \times 0,8 = 72$, puis $72 \times 0,8 = 57,60$, puis $57,6 \times 0,8 = 46,08$.

b) On cherche le premier n tel que $90 \times 0,8^n < 30$, soit $0,8^n < \frac{1}{3}$. Avec 4 parois, $0,8^4 = 0,4096$, l'énergie vaut environ 36,86 ; avec 5 parois,

$$90 \times 0,8^5 \approx 29,49$$

Il faut 5 **parois**. La réduction totale est alors d'environ 67,2 %, et non de $5 \times 20 = 100\%$: le son ne disparaît jamais totalement.

Réponse. a) 72 ; 57,60 ; 46,08 · b) 5 parois.

Correction de l'exercice 9 - Variations

Pour une suite géométrique $u_n = u_0 \times q^n$ de premier terme **positif**, le sens de variation se lit sur la raison : croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$, constante si $q = 1$.

a) $q = 1,04 > 1$ et $u_0 = 3 > 0$: **croissante** ($u_0 = 3$, $u_1 = 3,12$).

b) $q = 0,93 < 1$ et $v_0 = 200 > 0$: **décroissante** ($v_0 = 200$, $v_1 = 186$) ; les termes se rapprochent de 0 ($v_{50} \approx 5,31$).

c) $q = 1$: tous les termes valent 5, la suite est **constante**.

$$-3 \times 1,04^n$$

serait en revanche décroissante : avec un premier terme négatif, le sens s'inverse.

Réponse. a) croissante · b) décroissante · c) constante.

Correction de l'exercice 10 - Comparer deux modèles

a) Le modèle A est arithmétique, $a_n = 40n + 800$; le modèle B est géométrique, $b_n = 600 \times 1,07^n$. Au bout de 6 mois, $a_6 = 1\,040$ et $b_6 = 600 \times 1,07^6 \approx 900$: A est devant.

b) On compare les rangs suivants :

n	10	11	12
a_n	1 200	1 240	1 280
b_n	1 180	1 263	1 351

B dépasse A **au rang** 11, et l'écart ne cesse ensuite de grandir : au rang 20, 1 600 contre environ 2 322. Une croissance exponentielle finit toujours par dépasser une croissance linéaire ; la seule question est quand.

Réponse. a) 1040 contre ≈ 900 · b) B dépasse A au rang 11.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

L'élève a additionné les pourcentages, alors que des baisses successives se traduisent par des **multiplications** : perdre 12 %, c'est multiplier par 0,88. Après 8 étages :

$$0,88^8 \approx 0,3596$$

Il reste environ 36 % du signal : la perte vaut environ 64 %, et non 96 %.

Contrôle étage par étage, en pourcentage du signal : 88 ; 77,44 ; 68,15 ; 59,97 ; 52,77 ; 46,44 ; 40,87 ; 35,96. Pour perdre réellement 96 %, il faudrait $0,88^n \leq 0,04$, soit 26 étages.

Réponse. $0,88^8 \approx 0,3596$: il reste $\approx 36\%$, la perte est de $\approx 64\%$.

Correction de l'exercice 12 - Une dépréciation

a) Perdre 6 % revient à multiplier par 0,94 chaque année : $v_n = 2\,400 \times 0,94^n$.

b) $v_5 = 2\,400 \times 0,94^5 \approx 2\,400 \times 0,7339 \approx 1\,761,37$ €, soit une perte d'environ 638,63 €.

c) On cherche le premier n tel que $0,94^n < 0,5$: $0,94^{11} \approx 0,5063$ est encore au-dessus, et

$$0,94^{12} \approx 0,4759$$

L'équipement vaut moins de la moitié de son prix au bout de 12 **ans** (environ 1 142 €). Un amortissement linéaire sur 12 ans (200 € par an) donnerait 1 400 € au bout de 5 ans : ici, la dépréciation géométrique est plus lente au début.

Réponse. a) $v_n = 2400 \times 0,94^n$ · b) $\approx 1761,37$ € · c) 12 ans.

Correction de l'exercice 13 - Arithmétique ou géométrique ?

On cherche ce qui reste constant d'une étape à l'autre : une quantité ajoutée (arithmétique) ou un facteur multiplicatif (géométrique).

a) Le compteur avance de 50 unités par heure : **arithmétique** de raison 50.

b) Le décibel est une échelle logarithmique. Le niveau en dB baisse de 3 par étage : il suit une suite **arithmétique** de raison -3 . Mais la puissance du signal, elle, est divisée

par deux environ à chaque étage : elle suit une suite **géométrique** de raison environ 0,5.

c) La bactérie double toutes les 20 minutes : **géométrique** de raison 2, soit un facteur $2^3 = 8$ par heure.

d) Le stock baisse de 120 pièces par jour : **arithmétique** de raison -120 . Une baisse de 12 % par jour donnerait au contraire une suite géométrique, qui ne s'annulerait jamais.

$-3 \text{ dB} \Rightarrow$ puissance divisée par 2

Réponse. a) et d) arithmétique · b) arithmétique en dB, géométrique en puissance · c) géométrique de raison 2.

Correction de l'exercice 14 - Un taux équivalent

a) En 6 étapes, on multiplie six fois par la raison q : $q^6 = 1,5$. La raison est donc la racine sixième de 1,5 :

$$q = 1,5^{\frac{1}{6}} \approx 1,0699$$

soit une hausse d'environ 6,99 % par étape.

b) $1,0699^6 \approx 1,4999$: on retrouve 1,5 aux arrondis près.

Diviser 50 % par 6 donnerait 8,33 %, trop : $1,0833^6 \approx 1,616$. Par exemple, une grandeur de 240 passe à 360 en six étapes : 256,78 ; 274,72 ; 293,93 ; 314,47 ; 336,46 ; 359,97.

Réponse. a) $q \approx 1,0699$, soit $\approx +6,99\%$ · b) $1,0699^6 \approx 1,5$.

Correction de l'exercice 15 - Une cascade de filtres

a) Les fractions transmises se multiplient : $0,8 \times 0,75 \times 0,9 = 0,6 \times 0,9 = 0,54$. Il sort 54 % du signal.

b) Un filtre unique équivalent laisserait passer 54 %, c'est-à-dire atténuerait de 46 %. Additionner les atténuations ($20 + 25 + 10 = 55\%$) serait faux.

c) Quatre filtres identiques à 85 % transmettent

$$0,85^4 \approx 0,5220$$

soit environ 52,2 %, un peu moins que la cascade de a). Pour égaler exactement 54 %, il faudrait entre 3 filtres ($0,85^3 \approx 0,614$) et 4 filtres. L'ordre des filtres n'a aucune importance, car la multiplication est commutative.

Réponse. a) 54 % · b) un filtre atténuant de 46 % · c) $\approx 52,20\%$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : deux régimes

a) Réduire de 8 % revient à multiplier par 0,92 à chaque étape : $c_n = 2\,400 \times 0,92^n$.

b) $c_4 = 2\,400 \times 0,92^4 \approx 2\,400 \times 0,7164 \approx 1\,719,34 \text{ W}$.

c) On cherche le premier n tel que $0,92^n < \frac{1\,500}{2\,400} = 0,625$: $0,92^5 \approx 0,6591$ ne suffit pas, $0,92^6 \approx 0,6064$ convient. Il faut 6 **étapes** (environ 1 455 W).

d) Pendant les étapes 1 à 4, la machine consomme successivement 2 208 ; 2 031,36 ; 1 868,85 et 1 719,34 W, soit au total

$$2\,208 + 2\,031,36 + 1\,868,85 + 1\,719,34 \approx 7\,827,55 \text{ W}$$

contre $4 \times 2\,400 = 9\,600 \text{ W}$ sans réglage. L'économie vaut environ 1 772,45 W, soit 1 772,45 kWh sur 1 000 h par étape, environ 308 € à 0,174 € le kWh.

Réponse. a) $c_n = 2400 \times 0,92^n$ · b) $\approx 1719,34 \text{ W}$ · c) 6 étapes · d) $\approx 1772 \text{ kWh}$, soit $\approx 308 \text{ €}$.