

Plaquette 5 - Déphasage : lire et exploiter $A \cos(\omega t + \varphi)$

Trigonométrie — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le modèle complet.

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- A : amplitude · ω : pulsation (rad/s) · φ : **phase à l'origine** (rad).
- L'amplitude, la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la fréquence $f = \frac{1}{T}$ **ne dépendent pas** de φ .
- En $t = 0$: $u(0) = A \cos \varphi$.

Traduire un déphasage en temps.

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\pi} \times T$$

Déphasage	En degrés	Décalage
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{T}{8}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	$\frac{T}{4}$
π	180°	$\frac{T}{2}$ (opposition de phase)

- $\varphi > 0$: le signal est **en avance** (il atteint son maximum plus tôt).
- $\varphi < 0$: il est **en retard**.
- Passage du sinus au cosinus : $A \sin(\omega t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Instants remarquables. On résout l'équation sur l'angle total $\omega t + \varphi$:

- maximum : $\omega t + \varphi = 0$ ou 2π · zéro : $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ · minimum : $\omega t + \varphi = \pi$.

Puissance en régime alternatif. Si la tension et le courant sont déphasés de φ :

$$P = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \times \cos \varphi$$

où $\cos \varphi$ est le **facteur de puissance**. La puissance apparente vaut $S = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}}$, en voltampères.

⚠ Un déphasage ne se lit jamais « à l'œil » sur l'expression : on identifie φ comme le terme **ajouté** à ωt , pas comme un facteur.

Correction de l'exercice 1 - Lire un signal déphasé

On identifie terme à terme avec le modèle $u(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$: l'amplitude vaut $A = 6 \text{ V}$, la pulsation $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$ et la phase à l'origine $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$, soit 60° . La période et la fréquence ne dépendent que de la pulsation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02 \text{ s} \quad f = \frac{1}{T} = 50 \text{ Hz}$$

Le point clé : φ ne modifie **ni** l'amplitude **ni** la période. Sur la figure, la courbe de u est simplement décalée par rapport au signal sans déphasage.

Réponse. $A = 6 \text{ V}$, $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $T = 0,02 \text{ s}$, $f = 50 \text{ Hz}$.

Correction de l'exercice 2 - Valeur à l'origine

En $t = 0$, le terme $100\pi t$ s'annule et l'angle se réduit à la phase φ :

$$u(0) = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \text{ V}$$

On a utilisé la valeur remarquable $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. La tension à l'origine vaut donc la moitié de l'amplitude : à cause du déphasage, le signal **n'est pas** à son maximum en $t = 0$. Sans déphasage, on aurait eu $u(0) = 6 \cos 0 = 6 \text{ V}$.

Réponse. $u(0) = 3 \text{ V}$, soit la moitié de l'amplitude.

Correction de l'exercice 3 - Traduire le déphasage en temps

Un déphasage φ correspond à un décalage dans le temps égal à $\frac{\varphi}{\omega}$:

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi/3}{100\pi} = \frac{1}{300} \text{ s} \approx 3,33 \text{ ms}$$

Le π se simplifie. Comme φ est **positif**, le signal est en **avance** de 3,33 ms sur un signal non déphasé : son maximum arrive plus tôt.

Contrôle par la période : $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{1}{6}$, donc le décalage vaut un sixième de période, $\frac{0,02}{6} \approx 0,00333 \text{ s}$. Les deux méthodes concordent.

Réponse. $\Delta t = \frac{1}{300} \text{ s} \approx 3,33 \text{ ms}$, en **avance** (un sixième de période).

Correction de l'exercice 4 - Le premier maximum

Le cosinus vaut 1, sa valeur maximale, lorsque l'angle est un multiple de 2π . On cherche donc le premier $t > 0$ tel que $100\pi t + \frac{\pi}{3}$ soit égal à 0, 2π , 4π ...

Avec l'angle 0, on obtiendrait $100\pi t = -\frac{\pi}{3}$, soit $t = -\frac{1}{300} \text{ s}$, qui est négatif : on l'écarte. On prend donc l'angle 2π :

$$100\pi t + \frac{\pi}{3} = 2\pi \Leftrightarrow 100\pi t = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{3 \times 100\pi} = \frac{1}{60} \text{ s}$$

soit environ 16,7 ms. **Contrôle** : c'est $\frac{5}{6}$ de la période 0,02 s, et le maximum précédent, à $-3,33 \text{ ms}$, est bien une période plus tôt.

Réponse. $t = \frac{1}{60} \text{ s}$, soit environ 16,7 ms.

Correction de l'exercice 5 - Le premier zéro

Le cosinus s'annule lorsque l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, etc. En $t = 0$ l'angle vaut déjà $\frac{\pi}{3}$, et il augmente avec t : la première valeur atteinte est $\frac{\pi}{2}$.

$$100\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 100\pi t = \frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{1}{600} \text{ s}$$

soit environ 1,67 ms, qui est bien positif. Le zéro suivant, obtenu avec $\frac{3\pi}{2}$, est en $t = \frac{7}{600} \text{ s} \approx 11,7 \text{ ms}$: deux zéros consécutifs sont séparés de 10 ms, une demi-période.

Réponse. $t = \frac{1}{600} \text{ s}$, soit environ 1,67 ms.

Correction de l'exercice 6 - Une valeur quelconque

On calcule d'abord l'angle à l'instant demandé : $100\pi \times 0,004 = 0,4\pi$, auquel on ajoute la phase $\frac{\pi}{3} \approx 0,3333\pi$. L'angle total vaut environ $0,7333\pi$ rad, soit en degrés $0,7333 \times 180 \approx 132^\circ$.

$$u(0,004) = 6 \cos(0,7333\pi) \approx 6 \times (-0,669) \approx -4,01 \text{ V}$$

Contrôle de plausibilité : l'angle de 132° est dans le deuxième quadrant, où le cosinus est négatif ; et $|-4,01| < 6$, la valeur reste inférieure à l'amplitude. La calculatrice doit être en mode radian si l'on tape directement $\cos(0,7333\pi)$.

Réponse. $u(0,004) \approx -4,01 \text{ V}$.

Correction de l'exercice 7 - Du sinus au cosinus

On utilise la relation du cours qui transforme un sinus en cosinus :

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Appliquée à $x = 200\pi t$, elle donne $u(t) = 9 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$. On lit $A = 9$, $\omega = 200\pi \text{ rad/s}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$: la phase négative signale un **retard** d'un quart de période sur le cosinus. La fréquence vaut $f = \frac{200\pi}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$.

Vérification en $t = 0$: $9 \sin 0 = 0$ et $9 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, les deux écritures concordent. Le retard vaut $\frac{T}{4} = \frac{0,01}{4} = 2,5 \text{ ms}$.

Réponse. $u(t) = 9 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, de fréquence 100 Hz.

Correction de l'exercice 8 - Déphasage en degrés

Pour convertir en degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$; pour obtenir la fraction de période, on divise par 2π , puisqu'un tour complet correspond à une période entière.

$$\frac{\pi}{6} \rightarrow 30^\circ \rightarrow \frac{T}{12} \quad \frac{\pi}{4} \rightarrow 45^\circ \rightarrow \frac{T}{8} \quad \frac{2\pi}{3} \rightarrow 120^\circ \rightarrow \frac{T}{3}$$

Par exemple, $\frac{2\pi/3}{2\pi} = \frac{2}{3 \times 2} = \frac{1}{3}$. On peut aussi raisonner en degrés : $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.

Déphasage	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$
En degrés	30°	45°	120°
Décalage	$T/12$	$T/8$	$T/3$

Réponse. 30° , 45° , 120° , soit $\frac{T}{12}$, $\frac{T}{8}$ et $\frac{T}{3}$.

Correction de l'exercice 9 - Deux signaux déphasés

a) La phase à l'origine vaut 0 pour u_1 et $-\frac{\pi}{4}$ pour u_2 . Le signe négatif indique que u_2 est en **retard** : u_1 atteint son maximum en $t = 0$, u_2 un peu plus tard, comme on le voit sur la figure.

b) Le décalage temporel se calcule à partir de l'écart de phase $\frac{\pi}{4}$:

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi/4}{100\pi} = \frac{1}{400} \text{ s} = 2,5 \text{ ms}$$

Contrôle par la période : $T = 0,02 \text{ s}$ et $\frac{T}{8} = 0,0025 \text{ s}$, cohérent avec le fait que $\frac{\pi}{4}$ représente un huitième de tour. Le maximum de u_2 a donc lieu en $t = 2,5 \text{ ms}$.

Réponse. a) u_2 , à cause du signe moins · b) $2,5 \text{ ms}$, soit un huitième de période.

Correction de l'exercice 10 - Opposition de phase

On utilise la propriété des angles associés : ajouter π à un angle donne le point diamétralement opposé du cercle, dont l'abscisse est opposée.

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

Avec $x = 100\pi t$: $u_2(t) = 8 \cos(100\pi t + \pi) = -8 \cos(100\pi t) = -u_1(t)$. La somme $u_1(t) + u_2(t)$ est donc **nulle à tout instant**.

On dit que les deux signaux sont en **opposition de phase** : le décalage vaut une demi-période, $\frac{T}{2} = 0,01 \text{ s}$. C'est le principe des casques antibruit, qui émettent un son en opposition de phase avec le bruit. Si les amplitudes étaient différentes, la somme ne s'annulerait plus : elle aurait pour amplitude la différence des deux amplitudes.

Réponse. $u_2 = -u_1$ (déphasage π) : leur somme est nulle à tout instant.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver la phase

En $t = 0$, le signal vaut $u(0) = A \cos \varphi$. On écrit cette condition avec les données :

$$20 \cos \varphi = 10 \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Sur $]-\pi; \pi]$, cette équation a deux solutions, $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. L'énoncé précise que le signal est en **avance**, donc $\varphi > 0$: on retient $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Avec $\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad/s}$, le signal s'écrit

$$u(t) = 20 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Vérification : $u(0) = 20 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ V}$. Sans l'indication « en avance », les deux phases convenaient : la valeur à l'origine ne suffit pas à déterminer φ .

Réponse. $\varphi = \frac{\pi}{3}$ et $u(t) = 20 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 12 - Écrire un signal en retard

La fréquence de 50 Hz donne $\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad/s}$ et $T = 0,02 \text{ s}$. Un quart de période dure $0,005 \text{ s}$; le déphasage correspondant vaut

$$\varphi = \omega \times \Delta t = 100\pi \times 0,005 = \frac{\pi}{2}$$

Un **retard** se traduit par une phase négative, donc $u(t) = 15 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, ce qui s'écrit aussi $15 \sin(100\pi t)$ d'après $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$.

Vérification : $u(0) = 15 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, et le premier maximum arrive en $t = 0,005 \text{ s}$, un quart de période après celui de la référence.

Réponse. $u(t) = 15 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire $15 \sin(100\pi t)$.

Correction de l'exercice 13 - Facteur de puissance

a) La puissance apparente est le produit des valeurs efficaces :

$S = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} = 230 \times 5 = 1\,150 \text{ VA}$. Son unité est le voltampère, distinct du watt, car elle ne tient pas compte du déphasage.

b) La puissance active, celle qui produit réellement un travail, fait intervenir le facteur de puissance $\cos \varphi$:

$$P = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \times \cos \varphi = 1\,150 \times \cos \frac{\pi}{3} = 1\,150 \times 0,5 = 575 \text{ W}$$

Seule la moitié de la puissance apparente est utile : le réseau transporte 5 A pour seulement 575 W. C'est pourquoi un mauvais facteur de puissance est pénalisé par les fournisseurs d'électricité chez les industriels.

Réponse. a) 1 150 VA · b) 575 W.

Correction de l'exercice 14 - Un meilleur facteur de puissance

a) Le facteur de puissance vaut $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ et la puissance apparente $230 \times 8 = 1\,840 \text{ VA}$. La puissance active est leur produit :

$$P = 1\,840 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1\,593 \text{ W}$$

b) Sans déphasage, $\cos 0 = 1$ et toute la puissance apparente serait active : $P = 1\,840 \text{ W}$. L'écart vaut $1\,840 - 1\,593 = 247 \text{ W}$, soit $\frac{247}{1\,840} \approx 13,4\%$ de la puissance obtenue sans déphasage.

Pour un même courant transporté, le déphasage fait donc perdre 13,4 % de puissance active, contre 50 % dans l'exercice précédent où $\cos \varphi = 0,5$. Plus $\cos \varphi$ est proche de 1, mieux l'installation est exploitée.

Réponse. a) environ 1 593 W · b) 1 840 W sans déphasage : le déphasage fait perdre environ 13,4 % de puissance active.

Correction de l'exercice 15 - Un déphasage mesuré à l'oscilloscope

a) Le décalage de 1,5 ms se convertit en déphasage avec la pulsation

$$\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad/s} :$$

$$\varphi = \omega \times \Delta t = 100\pi \times 0,0015 = 0,15\pi \approx 0,471 \text{ rad}$$

En degrés, $0,15 \times 180 = 27^\circ$. Le courant est en **retard** sur la tension. **Contrôle** : 1,5 ms représentent $\frac{1,5}{20} = 0,075$ période, et $0,075 \times 360^\circ = 27^\circ$.

b) Le facteur de puissance est le cosinus du déphasage : $\cos 27^\circ \approx 0,891$, soit environ 0,89. Le cosinus étant pair, le signe du déphasage (avance ou retard) n'intervient pas. Une valeur de 0,89 est correcte, sans être excellente.

Réponse. a) $0,15\pi \approx 0,471 \text{ rad}$, soit 27° · b) $\cos \varphi \approx 0,89$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un atelier sous 230 V

a) Les valeurs efficaces s'obtiennent en divisant les amplitudes par $\sqrt{2}$:

$$U_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}} \approx 230 \text{ V} \text{ et } I_{\text{eff}} = \frac{11,3}{\sqrt{2}} \approx 7,99 \text{ A, soit environ 8 A.}$$

b) Le courant a une phase de $-\frac{\pi}{4}$: il est en retard de $\Delta t = \frac{\pi/4}{100\pi} = \frac{1}{400}$ s = 2,5 ms, c'est-à-dire $\frac{T}{8}$.

c) La puissance apparente vaut $S = 230 \times 8 = 1\,840$ VA. Le facteur de puissance vaut $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$, d'où

$$P = S \times \cos \varphi \approx 1\,840 \times 0,707 \approx 1\,301 \text{ W}$$

Seuls 70,7 % de la puissance apparente sont donc utilisés.

d) Pour garder $P = 1\,301$ W avec $\cos \varphi = 0,95$, on isole le courant dans

$$P = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \times \cos \varphi :$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{P}{U_{\text{eff}} \times \cos \varphi} = \frac{1\,301}{230 \times 0,95} = \frac{1\,301}{218,5} \approx 5,95 \text{ A}$$

Le courant baisse de $8 - 5,95 = 2,05$ A, soit $\frac{2,05}{8} \approx 26$ %, pour le même travail fourni.

Moins de courant, c'est moins de pertes dans les câbles : c'est pourquoi on installe des condensateurs de compensation.

Réponse. a) 230 V et 8 A · b) 2,5 ms · c) 1 840 VA et environ 1 301 W · d) environ 5,95 A, soit 26 % de courant en moins.