

Plaquette 1 - Radians, cercle trigonométrique et signaux sinusoïdaux

Trigonométrie — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Conversion : $180^\circ = \pi$ rad, donc

$$\text{rad} = \text{degrés} \times \frac{\pi}{180} \quad \text{degrés} = \text{rad} \times \frac{180}{\pi}$$

— Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

- Propriétés : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\cos(-x) = \cos x$; $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques.
- Sur le cercle trigonométrique, l'abscisse du point associé à x est $\cos x$ et son ordonnée $\sin x$; les deux restent dans $[-1 ; 1]$.
- **Signal sinusoïdal** $u(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$:
- A est l'**amplitude** (valeur maximale) ; $u(t)$ varie dans $[-A ; A]$;
- ω est la **pulsation** en rad/s ; φ la **phase à l'origine** en rad ;
- **période** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (en s) et **fréquence** $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (en Hz), donc $\omega = 2\pi f$.
- Valeur efficace d'une tension sinusoïdale : $U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 1 - Convertir des degrés en radians

Puisque $180^\circ = \pi$ rad, un degré vaut $\frac{\pi}{180}$ rad : on multiplie chaque mesure par $\frac{\pi}{180}$, puis on simplifie la fraction obtenue.

$$30^\circ = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \quad 45^\circ = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \quad 120^\circ = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \quad 270^\circ = \frac{270\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$$

On a simplifié respectivement par 30, 45, 60 et 90. **Contrôle** : 270° est les trois quarts d'un tour de $360^\circ = 2\pi$, et $\frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$.

Réponse. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 2 - Convertir des radians en degrés

Pour passer des radians aux degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$:

$$\text{degrés} = \text{rad} \times \frac{180}{\pi}$$

- $\frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60^\circ$.
- $\frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 5 \times 30 = 150^\circ$.
- $\frac{7\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 7 \times 45 = 315^\circ$.
- $2 \times \frac{180}{\pi} = \frac{360}{\pi} \approx 114,6^\circ$: ici le π ne se simplifie pas, car la mesure 2 rad n'est pas écrite avec π . Un radian vaut environ $57,3^\circ$.

Réponse. 60° ; 150° ; 315° ; $\approx 114,6^\circ$.

Correction de l'exercice 3 - Valeurs remarquables

On lit le tableau des valeurs remarquables du cours.

- a) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- b) $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (l'angle de 45° est sur la bissectrice).
- c) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.
- Contrôle avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$: pour a), $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. Cohérent.

Réponse. a) $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ · b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ · c) 0 et 1.

Correction de l'exercice 4 - Utiliser $\cos^2 + \sin^2 = 1$

Formule du cours : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

- $\sin^2 x = 1 - 0,6^2 = 1 - 0,36 = 0,64$.
- Donc $\sin x = \pm 0,8$, et comme l'énoncé précise $\sin x > 0$:

$$\sin x = 0,8$$
- Interprétation : le point associé à x sur le cercle a pour coordonnées $(0,6 ; 0,8)$. Il est dans le premier quadrant.

Réponse. $\sin x = 0,8$.

Correction de l'exercice 5 - Parité et périodicité

- a) Le cosinus est une fonction **paire** : $\cos(-x) = \cos x$.
- b) Le sinus est **impair** : $\sin(-x) = -\sin x$.
- c) Le cosinus est 2π -périodique : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
- d) Comme $4\pi = 2 \times 2\pi$, on a $\sin(x + 4\pi) = \sin x$: ajouter un nombre entier de tours ne change rien.

Réponse. a) $\cos x$ · b) $-\sin x$ · c) $\cos x$ · d) $\sin x$.

Correction de l'exercice 6 - Lire un signal sinusoïdal

On compare à la forme du cours $u(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

- a) $A = 12$ V (amplitude), $\omega = 100\pi$ rad/s (pulsation), $\varphi = 0$ (pas de déphasage).
- b) La période se déduit de la pulsation, et le π se simplifie :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{2}{100} = 0,02 \text{ s}$$

- Fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ Hz}$. Sur la figure, le motif se répète bien toutes les 20 ms.
- On reconnaît la tension du réseau électrique français : 50 Hz.

Réponse. a) $A = 12 \text{ V}$, $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$, $\varphi = 0$ · b) $T = 0,02 \text{ s}$ et $f = 50 \text{ Hz}$.

Correction de l'exercice 7 - Signal avec déphasage

a) $A = 5 \text{ A}$; $\omega = 200\pi \text{ rad/s}$, donc $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200\pi}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$; $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

— Période : $T = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ s}$.

b) En $t = 0$, l'angle se réduit à la phase à l'origine :

$$i(0) = 5 \cos\left(0 + \frac{\pi}{3}\right) = 5 \times \frac{1}{2} = 2,5 \text{ A}$$

— Le déphasage fait que le signal ne démarre **pas** à son maximum : il vaut 2,5 A à $t = 0$, alors que son maximum est 5 A.

Réponse. a) $A = 5 \text{ A}$, $f = 100 \text{ Hz}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ · b) $i(0) = 2,5 \text{ A}$.

Correction de l'exercice 8 - Valeurs extrêmes d'un signal

a) Comme $\cos$ prend toutes les valeurs de $[-1 ; 1]$, la tension varie dans $[-8 ; 8]$ volts.

b) Période : $T = \frac{2\pi}{50\pi} = 0,04 \text{ s}$.

— Le maximum ($u = 8$) est atteint quand $\cos(50\pi t) = 1$, c'est-à-dire $50\pi t = 0$, donc à $t = 0 \text{ s}$ (et de nouveau à $t = T = 0,04 \text{ s}$).

— Le minimum ($u = -8$) est atteint quand $\cos(50\pi t) = -1$, soit $50\pi t = \pi$, donc $t = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s}$, c'est-à-dire à la **demi-période**.

Réponse. a) entre -8 V et 8 V · b) maximum à $t = 0$, minimum à $t = 0,02 \text{ s}$.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver l'expression d'un signal

a) Formule du cours : $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad/s}$.

b) $u(t) = 230\sqrt{2} \cos(100\pi t)$.

c) Valeur efficace : $U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{230\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 230 \text{ V}$.

— C'est exactement la tension du réseau domestique : la valeur **efficace** vaut 230 V, alors que l'amplitude atteint $230\sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$.

Réponse. a) $100\pi \text{ rad/s}$ · b) $u(t) = 230\sqrt{2} \cos(100\pi t)$ · c) 230 V.

Correction de l'exercice 10 - Calculer des valeurs d'un signal

On remplace t dans l'expression, en calculant d'abord l'argument du cosinus.

— $u(0) = 10 \cos 0 = 10 \text{ V}$.

— $u(0,005) = 10 \cos(100\pi \times 0,005) = 10 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ V}$.

— $u(0,01) = 10 \cos(100\pi \times 0,01) = 10 \cos(\pi) = -10 \text{ V}$.

— Lecture : la période valant 0,02 s, $t = 0,005 \text{ s}$ correspond au quart de période (passage par zéro) et $t = 0,01 \text{ s}$ à la demi-période (minimum).

Réponse. 10 V ; 0 V ; -10 V.

Correction de l'exercice 11 - Problème : comparer deux signaux

- a) Même amplitude 6 V et même pulsation 100π rad/s, donc même fréquence 50 Hz. Ils ne diffèrent que par la **phase**.
- b) $u_1(0) = 6 \cos 0 = 6$ V ; $u_2(0) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ V.
- c) Le déphasage est de $\frac{\pi}{2}$ rad sur un tour de 2π rad, soit un **quart** de période.
- Période : $T = 0,02$ s, donc l'avance vaut $\frac{T}{4} = 0,005$ s.
- Autrement dit, u_2 atteint son maximum 0,005 s **avant** u_1 .

Réponse. a) oui aux deux (6 V, 50 Hz) · b) 6 V et 0 V · c) un quart de période, soit 0,005 s.

Correction de l'exercice 12 - Synthèse : étude d'un signal

- a) Amplitude : $A = 15$ V.
- Pulsation : $\omega = 400\pi$ rad/s.
- Fréquence : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{400\pi}{2\pi} = 200$ Hz.
- Période : on l'obtient directement à partir de la pulsation,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{400\pi} = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ s}$$

b) $u(0) = 15 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

- Le cosinus est pair, donc $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- $u(0) = 15 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 7,5\sqrt{2} \approx 10,61$ V.

c) $U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10,61$ V.

- Coïncidence intéressante : $u(0)$ et U_{eff} sont égales ici, parce que le déphasage vaut exactement $\frac{\pi}{4}$.

Réponse. a) 15 V, 400π rad/s, 200 Hz, 0,005 s · b) $\approx 10,61$ V · c) $\approx 10,61$ V.

Correction de l'exercice 13 - Coordonnées d'un point du cercle

- a) Les coordonnées de M sont $\left(\cos \frac{2\pi}{3}; \sin \frac{2\pi}{3}\right)$. Le point M est le symétrique, par rapport à l'axe des ordonnées, du point associé à $\frac{\pi}{3}$, puisque $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$: même ordonnée, abscisse opposée.

$$M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- b) La symétrie par rapport à l'axe des abscisses garde l'abscisse et change le signe de l'ordonnée : $N\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Elle change aussi le signe de l'angle, donc N est associé à $-\frac{2\pi}{3}$ (ou à $\frac{4\pi}{3}$, un tour plus loin).

Contrôle : $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, le point est bien sur le cercle.

Réponse. a) $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ · b) $N\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, associé à $-\frac{2\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 14 - Lire un oscillogramme

a) L'amplitude est la valeur maximale atteinte par la courbe : $A = 20$ V. La période est la durée au bout de laquelle le motif se répète : la courbe part de son maximum en $t = 0$ et y revient en $t = 10$ ms, donc $T = 10$ ms = 0,01 s.

b) La fréquence est l'inverse de la période, et la pulsation vaut $2\pi f$:

$$f = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ Hz} \quad \omega = 2\pi \times 100 = 200\pi \text{ rad/s}$$

La tension s'écrit donc $u(t) = 20 \cos(200\pi t)$.

Contrôle : en $t = 5$ ms = 0,005 s, l'angle vaut $200\pi \times 0,005 = \pi$ et $u = 20 \cos \pi = -20$ V : c'est bien le minimum lu sur la courbe.

Réponse. a) $A = 20$ V et $T = 10$ ms · b) $f = 100$ Hz, $\omega = 200\pi$ rad/s, $u(t) = 20 \cos(200\pi t)$.

Correction de l'exercice 15 - Problème : la position d'un rotor

a) Un tour complet vaut 360° . On effectue la division euclidienne de 1 000 par 360 : $1\,000 = 2 \times 360 + 280$. Le rotor a donc fait 2 **tours complets**, puis encore 280° .

b) Les tours complets ne changent pas la position : seule compte la mesure 280° , que l'on convertit en radians.

$$280^\circ = 280 \times \frac{\pi}{180} = \frac{280\pi}{180} = \frac{14\pi}{9} \text{ rad} \approx 4,89 \text{ rad}$$

On a simplifié par 20, et $\frac{14\pi}{9}$ appartient bien à $[0; 2\pi[$ puisque $14 < 18$.

c) $270^\circ < 280^\circ < 360^\circ$: la position finale est dans le **quatrième** quadrant, un peu après le bas du cercle.

Réponse. a) 2 tours · b) $\frac{14\pi}{9}$ rad $\approx 4,89$ rad · c) quatrième quadrant.