

Plaquette 2 - Radians et cercle trigonométrique

Trigonométrie — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Convertir. De $180^\circ = \pi$ rad on tire les deux sens :

$$\text{rad} = \text{degrés} \times \frac{\pi}{180} \quad \text{degrés} = \text{rad} \times \frac{180}{\pi}$$

Le cercle trigonométrique. Il a pour rayon 1. Au réel x correspond un point M dont l'abscisse est $\cos x$ et l'ordonnée $\sin x$. On en déduit que

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

Valeurs remarquables.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Signes par quadrant.

Quadrant	$\cos x$	$\sin x$
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	-	+
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	-	-
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	+	-

Trois relations indispensables.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- **Parité** : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.
- **Périodicité** : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
- **Angles associés** : $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

△ La **mesure principale** d'un angle est celle qui appartient à $] -\pi ; \pi]$: on ajoute ou on retire des tours entiers 2π jusqu'à y tomber.

Correction de l'exercice 1 - Des degrés aux radians

Comme $180^\circ = \pi$ rad, on convertit des degrés en radians en multipliant par $\frac{\pi}{180}$, puis on simplifie la fraction :

$$45^\circ = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \quad 60^\circ = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \quad 150^\circ = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$$

On a simplifié respectivement par 45, par 60 et par 30.

Contrôle : 150° est inférieur à 180° , donc sa mesure en radians doit être inférieure à π ; c'est bien le cas, $\frac{5\pi}{6} < \pi$.

Réponse. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 2 - Deux angles du second tour

On multiplie par $\frac{\pi}{180}$ et on simplifie : $210^\circ = \frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ (simplification par 30) et $315^\circ = \frac{315\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$ (simplification par 45).

On contrôle en décomposant les angles autour de repères connus :

$$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ \rightarrow \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \quad 315^\circ = 360^\circ - 45^\circ \rightarrow 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Le premier est dans le troisième quadrant, le second dans le quatrième.

Réponse. $210^\circ = \frac{7\pi}{6}$ et $315^\circ = \frac{7\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 3 - Des radians aux degrés

Pour passer des radians aux degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$: le π disparaît toujours.

$$\frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = \frac{2 \times 180}{3} = 120^\circ$$

De même, $\frac{5\pi}{4}$ donne $\frac{5 \times 180}{4} = 225^\circ$ et $\frac{7\pi}{6}$ donne $\frac{7 \times 180}{6} = 210^\circ$.

Contrôle : $\frac{5\pi}{4}$ dépasse π d'un quart de π , soit $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$. Un raisonnement mental de ce type suffit souvent à vérifier une conversion.

Réponse. 120° ; 225° ; 210° .

Correction de l'exercice 4 - Un angle non remarquable

Valeur exacte : $40 \times \frac{\pi}{180} = \frac{40\pi}{180}$, et l'on simplifie par 20 :

$$40^\circ = \frac{2\pi}{9} \text{ rad} \approx \frac{6,28318}{9} \approx 0,698 \text{ rad}$$

Contrôle d'ordre de grandeur : $45^\circ = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 \text{ rad}$, et 40° est un peu plus petit ; 0,698 est cohérent.

On garde la valeur exacte $\frac{2\pi}{9}$ dans les calculs et l'on n'arrondit qu'à la fin : arrondir trop tôt accumule les erreurs.

Réponse. $\frac{2\pi}{9} \approx 0,698 \text{ rad}$.

Correction de l'exercice 5 - Reconnaître un point du cercle

On repère les quatre directions du cercle : 0 à droite, $\frac{\pi}{2}$ en haut, π à gauche, $\frac{3\pi}{2}$ en bas, et l'on situe chaque réel entre deux d'entre elles.

- $0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$: premier quadrant, en haut à droite, c'est le point C.
- $-\frac{\pi}{4}$: on tourne dans le sens **horaire** à partir de 0, on arrive dans le quatrième quadrant, en bas à droite : c'est A.

- $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$: deuxième quadrant, en haut à gauche : c'est D .
- $\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$: troisième quadrant, en bas à gauche : c'est B .

La conversion en degrés confirme ces positions :

$$\frac{\pi}{3} \rightarrow 60^\circ \quad -\frac{\pi}{4} \rightarrow -45^\circ \quad \frac{5\pi}{6} \rightarrow 150^\circ \quad \frac{4\pi}{3} \rightarrow 240^\circ$$

Réponse. $\frac{\pi}{3} \rightarrow C$, $-\frac{\pi}{4} \rightarrow A$, $\frac{5\pi}{6} \rightarrow D$ et $\frac{4\pi}{3} \rightarrow B$.

Correction de l'exercice 6 - Mesure principale

Deux réels qui diffèrent d'un multiple de 2π désignent le **même** point du cercle : on ajoute ou on retire 2π jusqu'à tomber dans $]-\pi; \pi]$.

$$\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{13\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad -\frac{9\pi}{4} + 2\pi = -\frac{9\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

Les deux résultats appartiennent bien à $]-\pi; \pi]$: ce sont les mesures principales. $\frac{13\pi}{6}$ correspond à un tour complet plus $\frac{\pi}{6}$, et $-\frac{9\pi}{4}$ à un tour dans le sens horaire plus $-\frac{\pi}{4}$.

Réponse. $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 7 - Valeurs remarquables

On lit les valeurs dans le tableau du cours :

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Pour s'en souvenir : quand x va de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le cosinus **décroît** de 1 à 0 et le sinus **croît** de 0 à 1. Ainsi $\cos \frac{\pi}{6}$, angle plus petit, est plus grand que $\cos \frac{\pi}{3}$: on évite de confondre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Réponse. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1.

Correction de l'exercice 8 - Utiliser $\cos^2 + \sin^2 = 1$

On utilise la relation fondamentale, vraie pour tout réel :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Avec $\cos x = \frac{3}{5}$: $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, donc $\sin x = \frac{4}{5}$ ou $\sin x = -\frac{4}{5}$.

Pour choisir, on regarde l'intervalle : $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, le point est dans le premier quadrant, où le sinus est **positif**. Donc $\sin x = \frac{4}{5} = 0,8$. **Contrôle** : $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$.

Réponse. $\sin x = \frac{4}{5} = 0,8$.

Correction de l'exercice 9 - Le signe change tout

La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne $\sin^2 x = 1 - (-0,6)^2 = 1 - 0,36 = 0,64$, donc $\sin x = 0,8$ ou $\sin x = -0,8$. Le carré d'un nombre négatif est positif : $(-0,6)^2 = 0,36$, et non $-0,36$.

Le réel x appartient à $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: le point est dans le deuxième quadrant, où le sinus est **positif** :

$$\sin x = 0,8$$

Si x était dans le troisième quadrant, la réponse serait $-0,8$: c'est l'intervalle, et lui seul, qui fixe le signe.

Réponse. $\sin x = 0,8$.

Correction de l'exercice 10 - Parité

Les points du cercle associés à x et à $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : ils ont la même abscisse et des ordonnées opposées. D'où les formules

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\text{Donc } \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Contrôle : } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

$$\text{Réponse. } \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Correction de l'exercice 11 - Périodicité

Ajouter un tour complet, 2π , ramène au même point du cercle : cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π .

$$\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

car 4π représente deux tours complets. Plus généralement, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ pour tout entier k . C'est ce qui fait qu'un signal sinusoïdal reprend la même valeur à chaque période.

$$\text{Réponse. } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 12 - Angles supplémentaires

On écrit $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ (en effet $\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$). Les points associés à x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\text{Donc } \cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Contrôle : $\frac{5\pi}{6}$ est dans le deuxième quadrant, où le cosinus est négatif et le sinus positif.

$$\text{Réponse. } \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 13 - Un demi-tour de plus

On écrit $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$. Ajouter π conduit au point **diamétralement opposé** : les deux coordonnées changent de signe.

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

Donc $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Contrôle : $\frac{7\pi}{6}$, soit 210° , est dans le troisième quadrant, où cosinus et sinus sont tous deux négatifs.

Réponse. $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 - Une égalité impossible

Le cosinus d'un réel est l'**abscisse** d'un point du cercle trigonométrique, de rayon 1 : elle ne peut pas dépasser le rayon.

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Aucune valeur de x ne donne $\cos x = 1,2$; il en va de même pour $\sin x = -1,4$.

L'élève a probablement fait un calcul faux en amont : une calculatrice réglée en degrés au lieu de radians, ou une confusion avec la tangente, qui peut prendre toutes les valeurs. Réflexe : tout cosinus ou sinus hors de $[-1 ; 1]$ signale une erreur.

Réponse. Impossible : $\cos x$ reste dans $[-1 ; 1]$ (c'est une abscisse sur un cercle de rayon 1).

Correction de l'exercice 15 - Coordonnées d'un point du cercle

a) L'abscisse du point associé à x est $\cos x$, son ordonnée $\sin x$. Avec $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx (0,707; 0,707)$$

b) Sur un cercle de rayon 6 cm, les coordonnées sont multipliées par 6 :

$$\left(6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}; 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}), \text{ soit environ } (4,24; 4,24) \text{ cm.}$$

Contrôle par Pythagore : $(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36 = 6^2$. Le point est sur la bissectrice du premier quadrant.

Réponse. a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ · b) $(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$, soit environ $(4,24; 4,24)$ cm.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un plateau tournant

a) 30 tours par minute font 0,5 tour par seconde, et un tour vaut 2π rad :

$$\omega = 0,5 \times 2\pi = \pi \text{ rad/s} \approx 3,14 \text{ rad/s}$$

b) En 3 s, le repère parcourt $\pi \times 3 = 3\pi$ rad, soit un tour et demi (540°). Comme $3\pi - 2\pi = \pi$, il est à l'angle π , diamétralement opposé à sa position de départ.

c) Un quart de tour vaut $\frac{\pi}{2}$ rad, parcouru en $\frac{\pi/2}{\pi} = 0,5$ s. **Contrôle :** un tour prend 2 s, soit 30 tours par minute.

d) Au bout de $\frac{1}{6}$ s, l'angle vaut $\frac{\pi}{6}$, et les coordonnées sont

$$\left(0,40 \cos \frac{\pi}{6}; 0,40 \sin \frac{\pi}{6}\right) = (0,20\sqrt{3}; 0,20) \approx (0,346; 0,200) \text{ m. } \mathbf{Contrôle :}$$

$$0,346^2 + 0,20^2 \approx 0,16 = 0,40^2.$$

Réponse. a) π rad/s · b) 3π rad, soit la position opposée · c) 0,5 s · d) environ $(0,346; 0,200)$ m.