

Plaquette 3 - Résoudre $\cos x = a$ et $\sin x = a$

Trigonométrie — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La méthode, en trois gestes.

- **Geste 1** : isoler $\cos x$ ou $\sin x$ (l'équation doit être de la forme $\cos x = a$).
- **Geste 2** : vérifier que a appartient à $[-1 ; 1]$, sinon il n'y a **aucune** solution.
- **Geste 3** : repérer sur le cercle **les deux** points de même abscisse (pour un cosinus) ou de même ordonnée (pour un sinus), puis ne garder que ceux de l'intervalle demandé.

Où sont les deux solutions.

Équation	Solutions dans $[0 ; 2\pi[$	Symétrie utilisée
$\cos x = a$	x_0 et $2\pi - x_0$	axe des abscisses
$\sin x = a$	x_0 et $\pi - x_0$	axe des ordonnées

où x_0 est la solution « évidente » lue dans le tableau des valeurs remarquables.

Autrement dit, sur un tour :

$$\cos x = \cos x_0 \Leftrightarrow x = x_0 \text{ ou } x = 2\pi - x_0 \quad \sin x = \sin x_0 \Leftrightarrow x = x_0 \text{ ou } x = \pi - x_0$$

Cas particuliers à connaître.

Équation	Solutions dans $[0 ; 2\pi[$
$\cos x = 1$	0
$\cos x = -1$	π
$\cos x = 0$	$\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$
$\sin x = 1$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x = -1$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x = 0$	0 et π

Équation avec $2x$. On résout d'abord en posant $X = 2x$, **en adaptant l'intervalle** : si x décrit $[0 ; \pi]$, alors X décrit $[0 ; 2\pi]$.

⚠ Donner une seule solution est l'erreur la plus fréquente : on vérifie toujours si le cercle en offre une seconde dans l'intervalle demandé.

Correction de l'exercice 1 - Une première équation

On cherche les points du cercle d'abscisse $\frac{1}{2}$: ils sont deux, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Le premier correspond à la valeur remarquable $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; le second, par symétrie, à $2\pi - \frac{\pi}{3}$ sur $[0 ; 2\pi[$.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Contrôle : $\frac{\pi}{3}$ est dans le premier quadrant et $\frac{5\pi}{3}$ dans le quatrième, deux quadrants où le cosinus est positif. En degrés : 60° et 300° .

Réponse. $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 2 - Avec un sinus

On cherche les points d'ordonnée $\frac{1}{2}$, symétriques par rapport à l'axe des **ordonnées**. Le premier correspond à $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, le second à $\pi - \frac{\pi}{6}$:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

En degrés, 30° et 150° : deux points du demi-cercle supérieur, où le sinus est positif.

Utiliser $2\pi - x_0$, la symétrie qui sert pour le cosinus, donnerait $\frac{11\pi}{6}$, dont le sinus vaut $-\frac{1}{2}$: c'est le piège classique.

Réponse. $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 3 - Un cosinus négatif

La valeur associée est $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour obtenir un cosinus **négatif**, on passe à gauche de l'axe des ordonnées avec $\cos(\pi - x) = -\cos x$: $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Le second point est le symétrique de celui-ci par rapport à l'axe des abscisses :

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = 2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Ces réels sont dans les deuxième et troisième quadrants, où le cosinus est négatif. En degrés : 135° et 225° .

Réponse. $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 4 - Un sinus négatif

Un point d'ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ est **sous** l'axe des abscisses. La valeur associée est $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; les deux points cherchés s'obtiennent avec $\pi + \frac{\pi}{3}$ et $2\pi - \frac{\pi}{3}$:

$$x = \frac{4\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

Ils sont dans les troisième et quatrième quadrants. **Vérification :**

$\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, et de même $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. En degrés : 240° et 300° .

Réponse. $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 5 - Les cas particuliers

$\cos x = 0$: les points d'abscisse nulle sont en haut et en bas du cercle, d'où $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

$\sin x = -1$: le point d'ordonnée minimale est unique, en bas du cercle : $x = \frac{3\pi}{2}$.

$\cos x = 1$: le point d'abscisse maximale est unique, à droite du cercle : $x = 0$; la mesure 2π correspond au même point mais est exclue de $[0 ; 2\pi[$.

$\cos x = \pm 1$ ou $\sin x = \pm 1$: une seule solution par tour

Dans tous les autres cas où $-1 < a < 1$, il y en a deux.

Réponse. $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot 0$.

Correction de l'exercice 6 - Changer d'intervalle

La droite verticale d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{2}$ coupe le cercle en **deux** points, symétriques par rapport à l'axe des abscisses, puisque $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

Sur un tour $[0 ; 2\pi[$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions $\frac{\pi}{6}$ et $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Mais $\frac{11\pi}{6}$ n'appartient pas à $] -\pi ; \pi]$: on prend sa mesure principale,

$$\frac{11\pi}{6} - 2\pi = \frac{11\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

Les mesures principales sont donc $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$, soit 30° et -30° . On pouvait le lire directement : le cosinus est pair, donc x et $-x$ donnent toujours la même abscisse.

Réponse. Deux points, de mesures principales $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 7 - Isoler d'abord

a) On remplace x par la valeur demandée : $E(0) = 2 \times \cos 0 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$ et $E(\pi) = 2 \times \cos \pi - 1 = 2 \times (-1) - 1 = -3$.

b) On applique la méthode en trois gestes.

Isoler le cosinus : $2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.

Vérifier que la valeur est atteignable : $\frac{1}{2}$ appartient bien à $[-1 ; 1]$.

Lire le cercle :

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

Vérification : $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$. L'erreur à éviter consiste à diviser l'**angle** par 2 au lieu du cosinus.

Réponse. a) $E(0) = 1$ et $E(\pi) = -3$ · b) $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 8 - Une équation sans solution

a) On isole le sinus : $3 \sin x = 4 \Leftrightarrow \sin x = \frac{4}{3} \approx 1,33$. Or, pour tout réel,

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

et $\frac{4}{3} > 1$: l'équation n'a **aucune** solution. L'élève a tort.

b) De même, $3 \sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \frac{a}{3}$. Il faut et il suffit que $-1 \leq \frac{a}{3} \leq 1$, c'est-à-dire, en multipliant par 3 (positif), $-3 \leq a \leq 3$.

Interprétation physique : un signal d'amplitude 3, de la forme $3 \sin x$, ne prend que des valeurs entre -3 et 3 . Notons que pour $a = 3$ ou $a = -3$, il n'y a qu'**une** solution par tour :

« deux solutions » n'est donc pas une règle générale.

Réponse. a) Non : il faudrait $\sin x = \frac{4}{3} > 1$ · b) pour $-3 \leq a \leq 3$.

Correction de l'exercice 9 - Deux solutions par symétrie

La calculatrice ne donne qu'une solution, $x_0 \approx 1,287$ rad, dans le premier quadrant ($1,287 < \frac{\pi}{2} \approx 1,571$). La seconde s'obtient par la symétrie du cosinus :

$$x_1 = 2\pi - x_0 \approx 6,283 - 1,287 = 4,996 \text{ rad}$$

Elle est dans le quatrième quadrant, puisque $4,996 > \frac{3\pi}{2} \approx 4,712$. C'est cohérent : le cosinus est positif dans le premier et le quatrième quadrant.

Réponse. $x \approx 1,287$ rad ou $x \approx 4,996$ rad.

Correction de l'exercice 10 - Une équation en $2x$

a) On multiplie l'encadrement par 2, nombre positif : si $0 \leq x \leq \pi$, alors $0 \leq 2x \leq 2\pi$. Donc X décrit $[0; 2\pi]$, un tour complet.

b) Sur ce tour, $\cos X = \frac{1}{2}$ a deux solutions : $X = \frac{\pi}{3}$ ou $X = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. On revient à x en divisant par 2 :

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

Vérification : $2 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$, dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$. Oublier d'élargir l'intervalle de X ferait perdre la seconde solution.

Réponse. a) $[0; 2\pi]$ · b) $X = \frac{\pi}{3}$ ou $X = \frac{5\pi}{3}$, donc $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

Correction de l'exercice 11 - Les maximums d'un sinus en $2x$

Il s'agit de résoudre $\sin(2x) = 1$. On pose $X = 2x$. Pour $0 \leq x < 2\pi$, X parcourt $[0; 4\pi[$, c'est-à-dire **deux** tours. L'équation $\sin X = 1$ a une solution par tour : $X = \frac{\pi}{2}$, puis

$X = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$. En divisant par 2 :

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

Vérification : $\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{4}\right) = \sin \frac{5\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Sur un même intervalle, une équation en $2x$ a deux fois plus de solutions qu'une équation en x : ici, deux maximums au lieu d'un.

Réponse. $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 12 - Une inéquation lue sur le cercle

On résout d'abord l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $] -\pi; \pi]$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$. Sur le cercle, les points d'abscisse **au moins** $\frac{1}{2}$ forment l'arc MN qui passe par I , situé à droite de la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$, autour de 0 :

$$\cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

Contrôles : $\cos 0 = 1 \geq \frac{1}{2}$ pour un point intérieur, et $\cos \frac{\pi}{2} = 0 < \frac{1}{2}$ pour un point

extérieur. En degrés, ce sont les angles de -60° à 60° .

Réponse. L'arc MN qui passe par I : $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 13 - Quand un signal atteint zéro

a) La période d'un signal $A \cos(\omega t)$ vaut $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ici

$$T = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{2}{50} = 0,04 \text{ s}$$

b) $u(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(50\pi t) = 0$. Sur un tour, le cosinus s'annule pour un angle de $\frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2}$: $50\pi t = \frac{\pi}{2}$ donne $t = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ s}$, et $50\pi t = \frac{3\pi}{2}$ donne $t = \frac{3}{100} = 0,03 \text{ s}$.

Ces deux instants sont bien dans la première période $[0; 0,04[$: la tension s'annule deux fois par période, à un quart et à trois quarts de celle-ci.

Réponse. a) $T = 0,04 \text{ s}$ · b) $t = 0,01 \text{ s}$ et $t = 0,03 \text{ s}$.

Correction de l'exercice 14 - Quand un signal est maximal

Minimum : $u(t) = -24 \Leftrightarrow \cos(50\pi t) = -1$, qui n'a qu'une solution par tour : $50\pi t = \pi$, soit $t = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s}$, la demi-période.

Maximum : $u(t) = 24 \Leftrightarrow \cos(50\pi t) = 1$, soit $50\pi t = 0$ ou $50\pi t = 2\pi$: $t = 0$ ou $t = 0,04 \text{ s}$, le début et la fin de la période.

$$t = 0 \rightarrow 24 \quad t = 0,01 \rightarrow 0 \quad t = 0,02 \rightarrow -24 \quad t = 0,03 \rightarrow 0 \quad t = 0,04 \rightarrow 24$$

Avec l'exercice précédent, on retrouve le motif d'un signal sinusoïdal : maximum, zéro, minimum, zéro, maximum, tous les quarts de période (0,01 s).

Réponse. $u = -24 \text{ V}$ à $t = 0,02 \text{ s}$; $u = 24 \text{ V}$ à $t = 0$ et $t = 0,04 \text{ s}$.

Correction de l'exercice 15 - Retrouver un angle dans un triangle

a) Sur un tour, $\cos \theta = 0,5$ a pour solutions $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$. La contrainte $0 \leq \theta \leq \pi$ élimine $\frac{5\pi}{3}$: $\theta = \frac{\pi}{3}$, soit 60° .

b) La relation fondamentale donne $\sin^2 \theta = 1 - 0,25 = 0,75$. Sur $[0; \pi]$, le sinus est positif :

$$\sin \theta = \sqrt{0,75} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

C'est bien la valeur remarquable de $\sin \frac{\pi}{3}$, ce qui confirme le a).

Réponse. a) $\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ · b) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : les instants d'un signal

a) L'amplitude est $A = 24 \text{ V}$ et la pulsation $\omega = 50\pi \text{ rad/s}$, d'où $T = \frac{2\pi}{50\pi} = 0,04 \text{ s}$ et $f = \frac{1}{T} = 25 \text{ Hz}$.

b) $u(0) = 24 \cos 0 = 24 \text{ V}$. En $t = 0,005 \text{ s}$, l'angle vaut $50\pi \times 0,005 = \frac{\pi}{4}$, et

$$u = 24 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \approx 16,97 \text{ V}.$$

c) $u(t) = 12 \Leftrightarrow \cos(50\pi t) = \frac{1}{2}$, d'où un angle $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$:

$$50\pi t = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{150} \text{ s} \quad 50\pi t = \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow t = \frac{1}{30} \text{ s}$$

soit environ 6,67 ms et 33,3 ms.

d) La tension dépasse 12 V avant $\frac{1}{150}$ s et après $\frac{1}{30}$ s, soit pendant

$2 \times 0,006\,67 \approx 0,013\,3$ s sur 0,04 s : un **tiers** de la période. On le lit sur le cercle : l'arc où $\cos \geq \frac{1}{2}$ mesure $\frac{2\pi}{3}$, le tiers de 2π .

Réponse. a) 24 V, 0,04 s, 25 Hz · b) 24 V et $12\sqrt{2} \approx 16,97$ V · c) $t = \frac{1}{150}$ s et $t = \frac{1}{30}$ s · d) un tiers de la période.