

Plaquette 4 – Signaux sinusoïdaux : amplitude, période, fréquence

Trigonométrie — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le modèle.

$$u(t) = A \cos(\omega t)$$

Grandeur	Notation	Unité	Sens
amplitude	A	V, A...	valeur maximale du signal
pulsation	ω	rad/s	vitesse de parcours du cercle
période	T	s	durée d'un motif complet
fréquence	f	Hz	nombre de motifs par seconde

Les relations à connaître.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f$$

- Le signal varie entre $-A$ et A : son amplitude **crête à crête** vaut $2A$.
- Il vaut A en $t = 0$, s'annule au quart de période, vaut $-A$ à la demi-période.

Valeur efficace. C'est la valeur continue qui produirait le même échauffement :

$$U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \text{donc} \quad A = U_{\text{eff}}\sqrt{2}$$

Puissance dans un conducteur ohmique de résistance R .

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R} \quad P = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$$

△ Le réseau « 230 V » désigne une valeur **efficace** : l'amplitude réelle de la tension vaut $230\sqrt{2} \approx 325$ V.

Correction de l'exercice 1 - Lire un signal

On identifie terme à terme avec le modèle $u(t) = A \cos(\omega t)$: l'amplitude est $A = 12$ V et la pulsation $\omega = 100\pi$ rad/s, soit environ 314 rad/s. La période et la fréquence s'en déduisent :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02 \text{ s} \quad f = \frac{1}{T} = 50 \text{ Hz}$$

On reconnaît la fréquence du réseau électrique français. Le π de la pulsation se simplifie toujours dans le calcul de la période : c'est pour cela qu'on écrit 100π plutôt que 314.

Réponse. $A = 12$ V, $\omega = 100\pi$ rad/s, $T = 0,02$ s, $f = 50$ Hz.

Correction de l'exercice 2 - Un signal écrit avec sa fréquence

Le signal est écrit sous la forme $A \cos(2\pi f t)$: on y lit directement l'amplitude $A = 4$ A et la fréquence $f = 60$ Hz.

$$T = \frac{1}{60} \approx 0,0167 \text{ s} \quad \omega = 2\pi \times 60 = 120\pi \approx 377 \text{ rad/s}$$

La période vaut environ 16,7 ms. L'intérêt de cette écriture est que la fréquence se lit sans calcul. 60 Hz est la fréquence du réseau nord-américain, contre 50 Hz en Europe.

Réponse. $A = 4 \text{ A}$, $f = 60 \text{ Hz}$, $T \approx 16,7 \text{ ms}$, $\omega = 120\pi \approx 377 \text{ rad/s}$.

Correction de l'exercice 3 - De la fréquence à la pulsation

La pulsation se déduit de la fréquence par $\omega = 2\pi f$:

$$\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \approx 314 \text{ rad/s} \quad T = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s}$$

Avec une amplitude de 18 V, le signal s'écrit $u(t) = 18 \cos(100\pi t)$, ou de façon équivalente $18 \cos(2\pi \times 50 t)$.

Contrôle : en $t = 0$, $u(0) = 18 \cos 0 = 18 \text{ V}$, l'amplitude est bien atteinte ; et en $t = T = 0,02 \text{ s}$, l'angle vaut 2π , le signal revient à 18 V.

Réponse. $\omega = 100\pi \approx 314 \text{ rad/s}$, $T = 0,02 \text{ s}$, $u(t) = 18 \cos(100\pi t)$.

Correction de l'exercice 4 - De la période à tout le reste

On convertit d'abord la période en secondes : $4 \text{ ms} = 0,004 \text{ s}$. Alors

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,004} = 250 \text{ Hz} \quad \omega = 2\pi f = 500\pi \approx 1\,571 \text{ rad/s}$$

Oublier la conversion des millisecondes donnerait $f = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ Hz}$, une erreur d'un facteur 1 000. **Contrôle** : une période courte correspond à une fréquence élevée, ce qui est bien le cas.

Réponse. $f = 250 \text{ Hz}$ et $\omega = 500\pi \approx 1\,571 \text{ rad/s}$.

Correction de l'exercice 5 - Valeur efficace

La valeur efficace d'une tension sinusoïdale est son amplitude divisée par $\sqrt{2}$:

$$U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{325}{\sqrt{2}} \approx \frac{325}{1,414} \approx 229,8 \text{ V}$$

soit environ 230 V, la tension du réseau domestique.

Sens physique : une tension continue de 230 V chaufferait une résistance exactement autant que cette tension alternative d'amplitude 325 V. La valeur efficace vaut environ 70 % de l'amplitude, puisque $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$.

Réponse. $U_{\text{eff}} \approx 230 \text{ V}$.

Correction de l'exercice 6 - Remonter à l'amplitude

On inverse la relation $U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$:

$$A = U_{\text{eff}} \times \sqrt{2} = 230 \times 1,414 \approx 325,3 \text{ V}$$

La tension oscille donc entre -325 V et $+325 \text{ V}$: l'amplitude crête à crête vaut $2A \approx 650,5 \text{ V}$.

Conséquence pratique : le matériel branché sur le réseau doit supporter 325 V, et non seulement 230 V. Dimensionner une isolation sur la valeur efficace serait une erreur.

Réponse. $A \approx 325 \text{ V}$, soit environ 650 V crête à crête.

Correction de l'exercice 7 - Les valeurs aux quarts de période

On calcule l'angle $100\pi t$ à chaque instant, puis son cosinus.

- $t = 0$: angle 0, $u = 12 \times 1 = 12$ V.
- $t = 0,005$ s, un quart de période : angle $\frac{\pi}{2}$, $u = 0$ V.
- $t = 0,01$ s, une demi-période : angle π , $u = -12$ V.
- $t = 0,015$ s, trois quarts : angle $\frac{3\pi}{2}$, $u = 0$ V.

t (s)	0	0,005	0,01	0,015	0,02
u (V)	12	0	-12	0	12

$$u(t + T) = u(t) \quad T = 0,02 \text{ s}$$

Le motif maximum, zéro, minimum, zéro, maximum se répète à chaque période.

Réponse. 12 V ; 0 V ; -12 V ; 0 V.

Correction de l'exercice 8 - Écrire l'expression d'un signal

Le modèle est $u(t) = A \cos(2\pi ft)$ avec $A = 48$ V et $\omega = 2\pi \times 400 = 800\pi$ rad/s :

$$u(t) = 48 \cos(800\pi t)$$

La période vaut $T = \frac{1}{400} = 0,0025$ s, soit 2,5 ms.

Contrôle par l'autre formule : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{800\pi} = \frac{2}{800} = 0,0025$ s. Les deux chemins donnent la même période.

Réponse. $u(t) = 48 \cos(800\pi t)$, de période 2,5 ms.

Correction de l'exercice 9 - Compter les périodes

La fréquence est le nombre de périodes par seconde : en une durée donnée, le nombre de périodes est la fréquence multipliée par la durée.

$$50 \times 0,1 = 5 \text{ périodes} \quad 400 \times 0,1 = 40 \text{ périodes}$$

Vérification par les périodes : à 50 Hz, $T = 0,02$ s et $\frac{0,1}{0,02} = 5$; à 400 Hz, $T = 0,0025$ s et $\frac{0,1}{0,0025} = 40$. Le rapport des nombres de périodes, 8, est celui des fréquences, $\frac{400}{50}$.

Réponse. 5 périodes à 50 Hz, 40 périodes à 400 Hz.

Correction de l'exercice 10 - Lire un relevé d'oscilloscope

L'amplitude est la plus grande valeur atteinte, $A = 30$ V. Le signal revient à sa valeur initiale, 30 V, au bout de 10 ms : la période vaut $T = 0,01$ s, et la fréquence

$f = \frac{1}{0,01} = 100$ Hz. La pulsation vaut $2\pi \times 100 = 200\pi$ rad/s.

$$u(t) = 30 \cos(200\pi t)$$

Contrôle sur un point du tableau : en $t = 0,005$ s, l'angle vaut $200\pi \times 0,005 = \pi$, et $u = 30 \cos \pi = -30$ V, comme le relevé. Le signal vaut 30 V en $t = 0$, sans déphasage.

Réponse. $A = 30$ V, $T = 10$ ms, $f = 100$ Hz, $u(t) = 30 \cos(200\pi t)$.

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux signaux

a) Les périodes sont les inverses des fréquences : $T_1 = \frac{1}{50} = 0,02$ s, soit 20 ms, et $T_2 = \frac{1}{150} \approx 0,00667$ s, soit 6,67 ms.

b) Le nombre de périodes du second qui tiennent dans une période du premier est

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{150}{50} = 3$$

Exactement trois périodes du second signal tiennent dans une période du premier : on dit que le second est le **troisième harmonique** du premier. Le rapport des périodes est l'inverse du rapport des fréquences.

Réponse. a) 20 ms et 6,67 ms · b) exactement 3.

Correction de l'exercice 12 - Une pulsation donnée en clair

La fréquence se déduit de la pulsation par $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$f = \frac{628}{2\pi} \approx \frac{628}{6,283} \approx 99,95 \text{ Hz}$$

soit environ 100 Hz, et une période $T = \frac{1}{100} = 0,01$ s = 10 ms.

En réalité, 628 est un arrondi de $200\pi \approx 628,3$: la fréquence vaut exactement 100 Hz. Il est utile de reconnaître les multiples de π derrière les valeurs arrondies.

Réponse. $f \approx 100$ Hz et $T = 10$ ms.

Correction de l'exercice 13 - Valeur efficace d'un courant

a) Comme pour une tension, la valeur efficace d'un courant sinusoïdal est l'amplitude divisée par $\sqrt{2}$:

$$I_{\text{eff}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2,83 \text{ A}$$

b) La loi d'Ohm s'applique aux valeurs efficaces : $U_{\text{eff}} = R \times I_{\text{eff}} \approx 30 \times 2,83 \approx 84,9$ V.

Contrôle par les amplitudes : l'amplitude de la tension vaut $30 \times 4 = 120$ V, et $\frac{120}{\sqrt{2}} \approx 84,9$ V. La loi d'Ohm vaut pour les amplitudes comme pour les valeurs efficaces, à condition de ne pas les mélanger.

Réponse. a) $I_{\text{eff}} \approx 2,83$ A · b) $U_{\text{eff}} \approx 84,9$ V.

Correction de l'exercice 14 - Puissance dissipée

a) La loi d'Ohm en valeurs efficaces donne $I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R} = \frac{230}{100} = 2,3$ A.

b) La puissance dissipée par une résistance vaut

$$P = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} = 230 \times 2,3 = 529 \text{ W}$$

Seconde méthode : $P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{52\,900}{100} = 529 \text{ W}$.

Utiliser l'amplitude 325 V au lieu de la valeur efficace donnerait une puissance deux fois trop grande, puisque $325^2 \approx 2 \times 230^2$. En 5 h, le radiateur consomme $529 \times 5 = 2\,645$ Wh, environ 2,6 kWh.

Réponse. a) 2,3 A · b) 529 W.

Correction de l'exercice 15 - Deux signaux à comparer

- a) Les amplitudes valent 40 V et 30 V. Les pulsations 100π et 200π rad/s donnent des fréquences de 50 et 100 Hz : le second signal oscille **deux fois plus vite**, avec des périodes de 0,02 s et 0,01 s.
- b) Les valeurs efficaces s'obtiennent en divisant les amplitudes par $\sqrt{2}$:

$$U_1 = \frac{40}{\sqrt{2}} \approx 28,3 \text{ V} \quad U_2 = \frac{30}{\sqrt{2}} \approx 21,2 \text{ V}$$

La première alimentation chauffe donc davantage une même résistance. La fréquence n'intervient pas dans la valeur efficace : le rapport $\frac{40}{30} \approx 1,33$ est conservé.

Réponse. a) 40 V à 50 Hz contre 30 V à 100 Hz · b) 28,3 V contre 21,2 V.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une installation sur le réseau

- a) $A = 325 \text{ V}$ et $\omega = 100\pi$ rad/s, d'où $T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02 \text{ s}$ et $f = 50 \text{ Hz}$.
- b) $U_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}} \approx 230 \text{ V}$.
- c) $I_{\text{eff}} = \frac{230}{46} = 5 \text{ A}$, et l'amplitude du courant vaut $5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ A}$: $i(t) \approx 7,07 \cos(100\pi t)$.
- d) La puissance vaut

$$P = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} = 230 \times 5 = 1\,150 \text{ W}$$

(contrôle : $\frac{230^2}{46} = 1\,150 \text{ W}$). En 3 h, l'énergie consommée vaut 3 450 Wh, soit 3,45 kWh, pour un coût de $3,45 \times 0,18 \approx 0,62 \text{ €}$. C'est la puissance d'un petit radiateur d'appoint.

Réponse. a) 325 V, 0,02 s, 50 Hz · b) 230 V · c) 5 A et 7,07 A · d) 1 150 W, 3,45 kWh, 0,62 €.