

MATHÉMATIQUES

Trigonométrie

Première STI2D

Radian • Cercle trigonométrique • Angle orienté • Mesure principale
Cosinus • Sinus • Angles associés • Signal sinusoïdal • Pulsation • Période

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe de première STI2D** (BO spécial n°8 du 25 juillet 2019), partie mathématiques, « Trigonométrie ». Il couvre :

- cercle trigonométrique, radian, mesures d'un angle orienté, mesure principale ;
- cosinus et sinus d'un réel, valeurs remarquables, relations entre angles associés ;
- fonctions cosinus et sinus : périodicité, parité, courbes ; équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ sur le cercle ;
- fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$: amplitude, pulsation, période, fréquence, phase à l'origine.

Objectif : utiliser le radian et le cercle trigonométrique, connaître les valeurs remarquables et les angles associés, et décrire un signal $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$.

Document pédagogique – mathlvl.fr

Table des matières

1	Cercle trigonométrique et radian	3
2	Cosinus et sinus d'un réel	3
3	Fonctions cosinus et sinus	4
4	Signaux sinusoïdaux	5
5	Erreurs classiques	5
6	Fiche de synthèse	5
7	Exercices d'application	6
8	Corrigés des exercices	6

1. Cercle trigonométrique et radian

Cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct (inverse des aiguilles d'une montre).

Radian

Un angle de 1 **radian** intercepte sur ce cercle un arc de longueur 1. Le tour complet mesure 2π rad, donc

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}} \quad \text{et} \quad \text{angle en rad} = \text{angle en degrés} \times \frac{\pi}{180}.$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}; 45^\circ = \frac{\pi}{4}; 60^\circ = \frac{\pi}{3}; 90^\circ = \frac{\pi}{2}; 120^\circ = \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} = 150^\circ.$$

Mesures d'un angle orienté

À chaque réel x correspond un point M du cercle (on enroule la droite des réels sur le cercle). Les réels $x + 2k\pi$ (k entier) donnent le même point : ce sont les **mesures** du même angle orienté. Celle qui appartient à $] -\pi; \pi]$ est la **mesure principale**.

Mesure principale

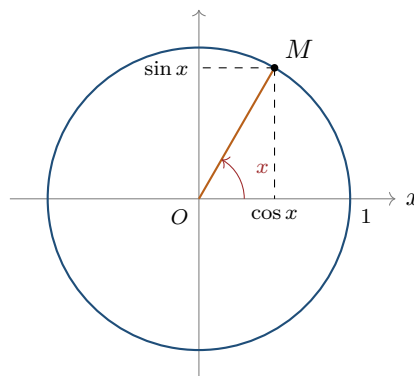
$$\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3} : \text{on retire 3 tours, la mesure principale est } -\frac{\pi}{3}.$$

2. Cosinus et sinus d'un réel

Cosinus et sinus

Si M est le point du cercle associé au réel x , alors $\cos x$ est l'abscisse de M et $\sin x$ son ordonnée :

$$M(\cos x; \sin x), \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \quad \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$



Le point M associé à $x = \frac{\pi}{3}$: $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Angles associés

Les symétries du cercle donnent, pour tout réel x :

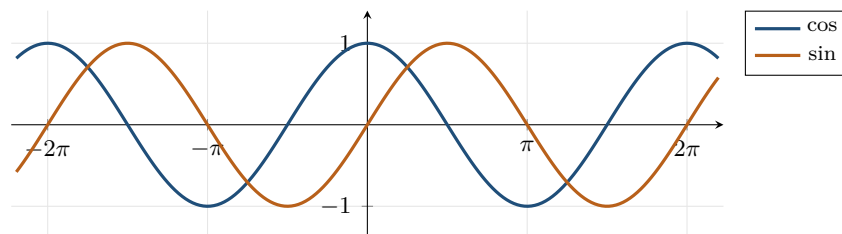
Angle	cosinus	sinus
$-x$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses)	$\cos x$	$-\sin x$
$\pi - x$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées)	$-\cos x$	$\sin x$
$\pi + x$ (symétrie de centre O)	$-\cos x$	$-\sin x$
$\frac{\pi}{2} - x$ (symétrie par rapport à la droite $y = x$)	$\sin x$	$\cos x$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} ; \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos \frac{5\pi}{4} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Fonctions cosinus et sinus

Périodicité et parité

Pour tout réel x : $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$: les deux fonctions sont **périodiques** de période 2π . $\cos(-x) = \cos x$: cosinus est **paire** (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) ; $\sin(-x) = -\sin x$: sinus est **impaire** (courbe symétrique par rapport à O).



Courbes des fonctions cosinus et sinus : on passe de l'une à l'autre par une translation de $\frac{\pi}{2}$.

Résoudre $\cos x = a$ ou $\sin x = a$

On place a sur l'axe des abscisses (cosinus) ou des ordonnées (sinus) : la droite correspondante coupe le cercle en **deux** points en général. Si $\cos \alpha = a$, les solutions sont $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$; si $\sin \alpha = a$, ce sont $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.

Sur $] -\pi ; \pi]$: $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}$. Sur $[0 ; 2\pi[$: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}$.

4. Signaux sinusoïdaux

Fonction $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$

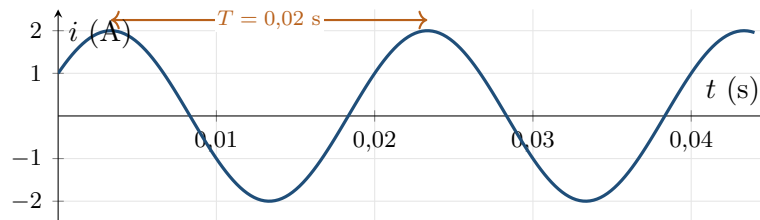
Avec $A > 0$ et $\omega > 0$, la fonction $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ modélise un signal sinusoïdal :

- A est l'**amplitude** : s varie entre $-A$ et A ;
- ω est la **pulsation** (en rad/s) ;
- la **période** est $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la **fréquence** $f = \frac{1}{T}$ (en hertz), d'où $\omega = 2\pi f$;
- φ est la **phase à l'origine**.

Il en est de même pour $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$.

Un courant alternatif

$i(t) = 2 \cos(100\pi t - \frac{\pi}{3})$ (en ampères, t en secondes). Amplitude 2 A ; pulsation 100π rad/s ; période $T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02$ s ; fréquence 50 Hz ; à l'instant 0 : $i(0) = 2 \cos(-\frac{\pi}{3}) = 1$ A.



Le courant $i(t) = 2 \cos(100\pi t - \frac{\pi}{3})$: deux maxima consécutifs sont séparés d'une période.

5. Erreurs classiques

À éviter

- Mélanger degrés et radians (calculatrice mal réglée).
- Donner une seule solution à $\cos x = a$: il y en a deux par tour en général.
- Écrire $T = \frac{\omega}{2\pi}$ au lieu de $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Confondre $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

6. Fiche de synthèse

Radian	$180^\circ = \pi$ rad ; mesures $x + 2k\pi$; principale dans $] -\pi ; \pi]$
Cercle	$M(\cos x ; \sin x) ; \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Angles associés	$\cos(-x) = \cos x ; \sin(-x) = -\sin x ; \cos(\pi - x) = -\cos x ; \sin(\pi - x) = \sin x$
Fonctions	période 2π ; cos paire, sin impaire
Signal	$A \cos(\omega t + \varphi) : T = \frac{2\pi}{\omega}, f = \frac{1}{T}, \omega = 2\pi f$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Conversions

Convertir 135° en radians et $\frac{5\pi}{6}$ rad en degrés.

Exercice 2 – Mesure principale

Déterminer la mesure principale de $\frac{25\pi}{4}$.

Exercice 3 – Valeurs exactes

Calculer $\cos \frac{5\pi}{6}$ et $\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Exercice 4 – Équation

Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $] -\pi ; \pi]$.

Exercice 5 – Signal

On considère $u(t) = 12 \sin(200\pi t)$. Donner l'amplitude, la période et la fréquence, puis calculer $u(0,0025)$.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$ rad ; $\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \times 180^\circ}{6} = 150^\circ$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $\frac{25\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 6\pi + \frac{\pi}{4}$: mesure principale $\frac{\pi}{4}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (les deux sont dans $] -\pi ; \pi]$).

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé. Amplitude 12 ; $\omega = 200\pi$, $T = \frac{2\pi}{200\pi} = 0,01$ s, $f = 100$ Hz. $u(0,0025) = 12 \sin(0,5\pi) = 12 \sin \frac{\pi}{2} = 12$.