

Plaquette 4 – Bernoulli, comptage et modélisation

Variables aléatoires – Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La variable de Bernoulli. Elle vaut 1 en cas de succès, 0 sinon.

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

Compter des succès. Si X compte les succès de n épreuves identiques et indépendantes de probabilité p :

$$E(X) = n \times p$$

Pourquoi c'est naturel. Chaque épreuve réussit en proportion p : sur n épreuves, on attend $n \times p$ succès, comme un effectif attendu. Pour n petit, on le vérifie sur la loi lue dans l'arbre.

Passer au coût. Si chaque succès coûte c euros :

$$E(\text{coût}) = c \times n \times p$$

Choisir le succès.

Succès choisi	Espérance
la pièce est bonne	np
la pièce est mauvaise	$n(1 - p)$

Les deux se complètent : leur somme vaut n .

⚠ La formule np suppose des épreuves **identiques et indépendantes** : sans cela, elle ne vaut plus.

Correction de l'exercice 1 – Une variable indicatrice

a) X ne prend que les valeurs 1 et 0 :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	0,04	0,96

$$E(X) = 0 \times 0,04 + 1 \times 0,96 = 0,96$$

b) Y vaut 1 exactement quand X vaut 0 :

$$E(Y) = 1 \times 0,04 + 0 \times 0,96 = 0,04$$

Contrôle. $E(X) + E(Y) = 1$: chaque pièce est soit conforme, soit défectueuse.

Réponse. a) $E(X) = 0,96$ — b) $E(Y) = 0,04$.

Correction de l'exercice 2 – Compter des conformes

a) Chaque pièce est conforme avec la probabilité 0,96, indépendamment des autres. Le nombre moyen de conformes est l'effectif attendu :

$$E(N) = n \times p = 50 \times 0,96 = 48$$

b) Les pièces non conformes représentent 4 % :

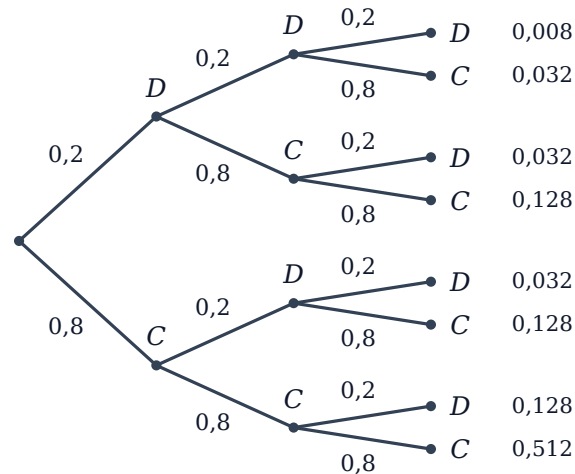
$$50 \times 0,04 = 2 \text{ rebuts en moyenne}$$

Contrôle. $48 + 2 = 50$.

Réponse. a) 48 — b) 2.

Correction de l'exercice 3 - Retrouver np par la loi

On retrouve la loi sur l'arbre des trois prélèvements : chaque chemin à k défauts a pour probabilité $0,2^k \times 0,8^{3-k}$, et il y a 1 ; 3 ; 3 ; 1 chemins à 0 ; 1 ; 2 ; 3 défauts.



D : pièce défectueuse

a) Par la définition :

$$E(X) = 0 \times 0,512 + 1 \times 0,384 + 2 \times 0,096 + 3 \times 0,008$$

$$E(X) = 0,384 + 0,192 + 0,024 = 0,6$$

b) $n \times p = 3 \times 0,2 = 0,6$: les deux calculs concordent. Le nombre moyen de défauts est bien « nombre de pièces $\times$ taux de défaut ».

Réponse. a) 0,6 — b) égal à $3 \times 0,2$.

Correction de l'exercice 4 - Du comptage au coût

a) Nombre moyen de rebuts par jour :

$$8000 \times 0,03 = 240$$

b) Chaque rebut coûte 22 € :

$$240 \times 22 = 5280 \text{ € par jour}$$

Sur 220 jours :

$$5280 \times 220 = 1\,161\,600 \text{ €}$$

Ce sont des valeurs moyennes : le nombre de rebuts fluctue d'un jour à l'autre autour de 240.

Réponse. a) 240 — b) 5280 € par jour, 1 161 600 € par an.

Correction de l'exercice 5 - Choisir le succès

a) Succès « pièce défectueuse », de probabilité 0,07 :

$$200 \times 0,07 = 14$$

b) Succès « pièce conforme », de probabilité $1 - 0,07 = 0,93$:

$$200 \times 0,93 = 186$$

Contrôle. $14 + 186 = 200$: chaque prélèvement est compté une fois, soit comme défaut, soit comme conforme. Changer de succès revient à remplacer p par $1 - p$.

Réponse. a) 14 — b) 186 ($14 + 186 = 200$).

Correction de l'exercice 6 - Dimensionner un lot

Si l'on lance n pièces, on obtient en moyenne $0,94 n$ conformes. On veut :

$$0,94 n \geq 500 \Leftrightarrow n \geq \frac{500}{0,94} \approx 531,9$$

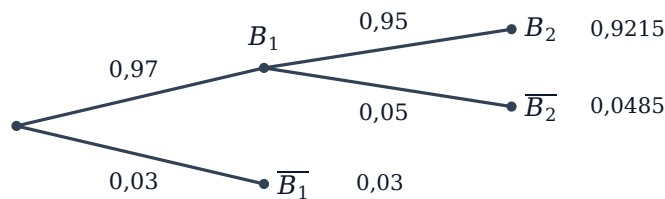
On lance donc au moins 532 pièces pour obtenir **en moyenne** 500 conformes.

Attention. Avec 532 pièces, on est juste à la moyenne : environ une fois sur deux, on obtiendra moins de 500 conformes. Pour satisfaire le client à coup presque sûr, on ajoute une marge (par exemple une cinquantaine de pièces).

Réponse. Au moins 532 pièces en moyenne, plus une marge de sécurité.

Correction de l'exercice 7 - Deux postes successifs

a) Une pièce est bonne au bout si elle est conforme **aux deux** postes ; les postes étant indépendants, on multiplie le long du chemin $B_1 B_2$.



B_i : conforme au poste i

$$P(B_1 \cap B_2) = 0,97 \times 0,95 = 0,9215$$

b) Sur 4000 pièces, le nombre moyen de pièces bonnes est :

$$4000 \times 0,9215 = 3686$$

Environ 314 pièces seront écartées à l'un des deux postes.

Réponse. a) 0,9215 — b) 3686 pièces bonnes en moyenne.

Correction de l'exercice 8 - Une garantie constructeur

a) Nombre moyen de réparations sur 25 000 appareils :

$$25\,000 \times 0,08 = 2000$$

b) Coût total moyen :

$$2000 \times 180 = 360\,000 \text{ €}$$

Provision par appareil :

$$360\,000 \div 25\,000 = 14,40 \text{ €}$$

Contrôle. $0,08 \times 180 = 14,4$: c'est le coût moyen de garantie d'un appareil.

Réponse. a) 2000 — b) 360 000 €, soit 14,40 € par appareil.

Correction de l'exercice 9 - La formule ne s'applique pas

a) **Non.** Après chaque tirage, le lot change : si la première pièce est bonne, il reste 23 bonnes sur 29, et la probabilité que la deuxième soit bonne devient $\frac{23}{29}$ au lieu de $\frac{24}{30}$. On ne répète pas la même épreuve : on ne peut pas utiliser le modèle des épreuves indépendantes.

b) L'événement $X = 0$ correspond au seul chemin « bonne, bonne, bonne, bonne, bonne », dont les probabilités changent à chaque étape :

$$P(X = 0) = \frac{24}{30} \times \frac{23}{29} \times \frac{22}{28} \times \frac{21}{27} \times \frac{20}{26} \approx 0,298$$

L'élève trouvait $0,8^5 \approx 0,328$: l'écart vient de la dépendance des tirages. Sur un très grand lot, l'écart deviendrait négligeable.

Réponse. a) Non — b) $P(X = 0) \approx 0,298$ et non 0,328.

Correction de l'exercice 10 - Espérance d'un total facturé

a) Chaque machine demande une intervention avec la probabilité 0,12 par mois :

$$80 \times 0,12 = 9,6 \text{ interventions par mois en moyenne}$$

b) Facture mensuelle moyenne : $9,6 \times 45 = 432$ €. Sur l'année :

$$432 \times 12 = 5184 \text{ €}$$

On suppose que les machines tombent en panne indépendamment, avec la même probabilité chaque mois.

Réponse. a) 9,6 — b) 5184 € par an.

Correction de l'exercice 11 - Remonter au taux

a) Le nombre moyen de rebuts est $n \times p$; on remonte au taux :

$$p = \frac{45}{1500} = 0,03$$

soit un taux de rebut de 3 %.

b) Sur 20 000 pièces :

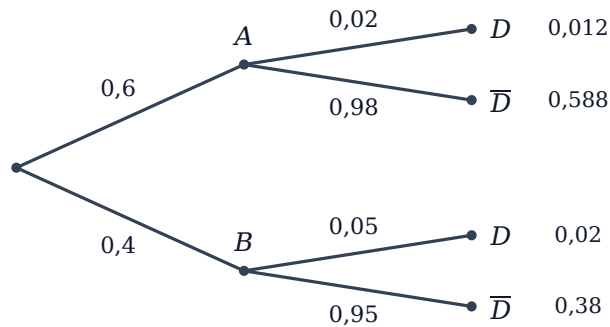
$$20\,000 \times 0,03 = 600 \text{ rebuts en moyenne}$$

Le nombre réel fluctuera autour de cette moyenne d'un lot à l'autre ; le taux de 3 % n'est lui-même qu'une estimation tirée des lots déjà contrôlés.

Réponse. a) 3 % — b) 600 rebuts.

Correction de l'exercice 12 – Deux fournisseurs mélangés

On commence par la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse, lue sur l'arbre (premier niveau : fournisseur ; second : état de la pièce).



D : pièce défectueuse

On additionne les deux chemins qui mènent à D :

$$P(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,012 + 0,02 = 0,032$$

Sur 1000 pièces :

$$1000 \times 0,032 = 32 \text{ défauts en moyenne}$$

Piège. Faire la moyenne simple des taux, $(2 + 5) / 2 = 3,5 \%$, ignore que A fournit plus de pièces.

Réponse. 32 défauts en moyenne.

Correction de l'exercice 13 – Une modélisation discutable

Le calcul $12 \times p$ donne le nombre moyen de **mois avec panne**, sous plusieurs hypothèses à discuter :

- la probabilité p est la **même chaque mois** : faux si la machine s'use, ou si l'activité est saisonnière ;
- les mois sont **indépendants** : faux si une panne mal réparée en provoque une autre le mois suivant ;
- il y a **au plus une panne par mois** : sinon on sous-estime le nombre de pannes.

Conclusion. Le modèle donne un ordre de grandeur utile pour un budget, mais il faut le confronter aux pannes réellement observées.

Réponse. Valable seulement si p est constant, les mois indépendants et une panne au plus par mois.

Correction de l'exercice 14 – Comparer deux organisations

Organisation 1 :

$$3000 \times 0,04 = 120 \text{ rebuts en moyenne}$$

Organisation 2 :

$$2000 \times 0,02 + 1000 \times 0,07 = 40 + 70 = 110$$

L'organisation 2 rebute le moins, avec 10 rebuts de moins en moyenne. Son taux global est $\frac{110}{3000} \approx 3,7 \%$.

Réponse. L'organisation 2 : 110 rebuts contre 120.

Correction de l'exercice 15 – Espérance et seuil de rentabilité

On raisonne **par pièce**.

- Coût moyen actuel des rebuts : $0,06 \times 12 = 0,72$ €.
- Le contrôle évite la moitié des rebuts : économie moyenne $0,72 \div 2 = 0,36$ €.
- Le contrôle coûte 0,40 €.

$$0,36 - 0,40 = -0,04$$

Le contrôle fait **perdre** en moyenne 0,04 € par pièce : il n'est **pas rentable**. Il le deviendrait si un rebut coûtait plus de $\frac{0,40}{0,03} \approx 13,33$ €.

Réponse. Non : perte moyenne de 0,04 € par pièce.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un atelier complet

a) Nombre moyen de rebuts par semaine :

$$12\,000 \times 0,045 = 540$$

b) Coût annuel :

$$540 \times 16 \times 46 = 397\,440 \text{ €}$$

c) Avec un taux de 2,5 % : $12\,000 \times 0,025 = 300$ rebuts par semaine, soit $300 \times 16 \times 46 = 220\,800$ €.

Économie moyenne : $397\,440 - 220\,800 = 176\,640$ € par an, supérieure aux 90 000 € investis. L'investissement est **rentable en un an**.

Réponse. a) 540 — b) 397 440 € — c) oui : 176 640 € économisés.