

Plaquette 2 – Dresser et compléter une loi de probabilité

Variables aléatoires — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Une variable aléatoire. Elle associe un **nombre** à chaque issue de l'expérience : un gain, un coût, un nombre de défauts, une durée.

Sa loi de probabilité. Le tableau des valeurs x_i et des probabilités $p_i = P(X = x_i)$.

La règle d'or.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Elle sert à compléter une probabilité manquante, et à contrôler tout calcul.

Les trois sources.

Donnée de départ	Geste
des effectifs	diviser par le total
un arbre	additionner les chemins
une description	lister les issues

Regrouper des valeurs. Si deux issues donnent le même nombre, leurs probabilités s'ajoutent.

Probabilités cumulées.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

⚠ Une probabilité est toujours dans $[0 ; 1]$: une valeur négative ou supérieure à 1 signale une erreur.

Correction de l'exercice 1 – Un gain sur un dé

On liste les valeurs possibles de X , puis la probabilité de chacune ; le dé étant équilibré, chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$.

- $X = 10$: face 6, donc $P(X = 10) = \frac{1}{6}$;
- $X = 4$: faces 4 et 5, donc $P(X = 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
- $X = 0$: faces 1, 2, 3, donc $P(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

x_i	0	4	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Contrôle. $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

Réponse. $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 4) = \frac{1}{3}$, $P(X = 10) = \frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 2 – Compléter une loi

La somme des probabilités d'une loi vaut 1 :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

donc

$$P(X = 2) = 1 - (0,35 + 0,28 + 0,09) = 1 - 0,72 = 0,28$$

Contrôle. $0,35 + 0,28 + 0,28 + 0,09 = 1$; la valeur trouvée est bien comprise entre 0 et 1. Les valeurs 1 et 2 ont ici la même probabilité, ce qui n'a rien d'anormal.

Réponse. $P(X = 2) = 0,28$.

Correction de l'exercice 3 - Une loi lue dans un tableau

Les pièces sont au nombre de $620 + 250 + 100 + 30 = 1000$. Une pièce prise au hasard a la même chance d'être choisie que toute autre : on divise chaque effectif par 1000.

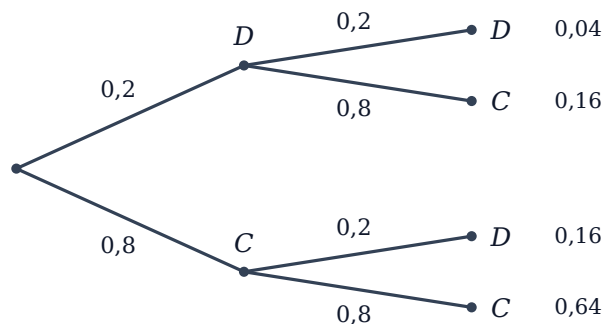
x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,62	0,25	0,10	0,03

Contrôle. $0,62 + 0,25 + 0,10 + 0,03 = 1$.

Réponse. 0,62 ; 0,25 ; 0,10 ; 0,03.

Correction de l'exercice 4 - Nombre de défauts sur deux prélèvements

On construit l'arbre des deux prélèvements indépendants (D : défectueuse, probabilité 0,2), puis on lit X au bout de chaque chemin.



D : pièce défectueuse

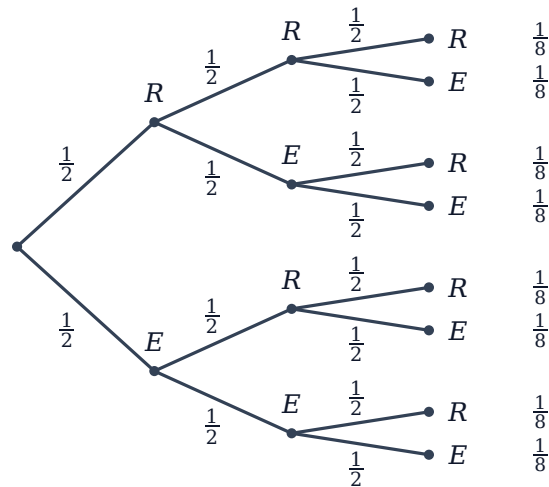
- $X = 0$: chemin CC , $0,8^2 = 0,64$;
- $X = 1$: chemins DC et CD , $2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,32$;
- $X = 2$: chemin DD , $0,2^2 = 0,04$.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,64	0,32	0,04

Réponse. 0,64 ; 0,32 ; 0,04.

Correction de l'exercice 5 - Trois essais équilibrés

Chacun des 8 chemins a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; on compte les chemins selon le nombre de réussites (1 ; 3 ; 3 ; 1).



R : réussite, $p = 1/2$

a) Loi de X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Réponse. a) $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{8}$ — b) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 - Un coût de réparation

a) Les pannes bénignes, moyennes et graves représentent 60 %, 30 % et donc $100 - 60 - 30 = 10$ % des cas.

c_i (€)	0	150	800
$P(C = c_i)$	0,6	0,3	0,1

b) $C \geq 150$ correspond aux valeurs 150 et 800 :

$$P(C \geq 150) = 0,3 + 0,1 = 0,4$$

Réponse. a) 0,6 ; 0,3 ; 0,1 — b) 0,4.

Correction de l'exercice 7 - Regrouper des valeurs

Le montant facturé ne prend que **deux** valeurs : 12 € (réglage court **ou** contrôle simple) et 30 €. On regroupe les probabilités des issues qui donnent la même valeur :

$$P(X = 12) = 0,45 + 0,25 = 0,7 \quad P(X = 30) = 0,3$$

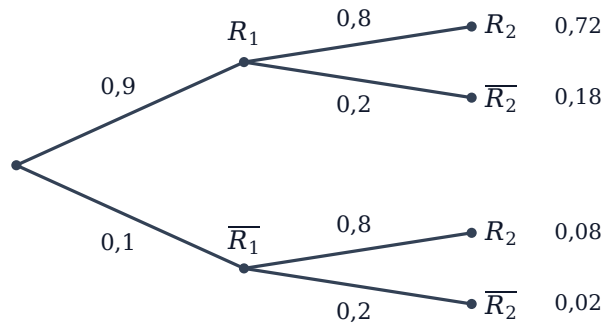
x_i (€)	12	30
$P(X = x_i)$	0,7	0,3

Piège. Écrire deux colonnes « 12 » dans le tableau : une loi donne chaque **valeur** une seule fois.

Réponse. $P(X = 12) = 0,7$ et $P(X = 30) = 0,3$.

Correction de l'exercice 8 - Une loi issue d'un arbre

Les deux contrôles sont indépendants ; on lit X (nombre de contrôles réussis) au bout de chaque chemin.



R_i : contrôle i réussi

- $X = 2$: $0,9 \times 0,8 = 0,72$;
- $X = 1$: deux chemins, $0,9 \times 0,2 + 0,1 \times 0,8 = 0,18 + 0,08 = 0,26$;
- $X = 0$: $0,1 \times 0,2 = 0,02$.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,02	0,26	0,72

Contrôle. $0,02 + 0,26 + 0,72 = 1$.

Réponse. 0,02 ; 0,26 ; 0,72.

Correction de l'exercice 9 - Probabilités cumulées

On additionne les probabilités des valeurs concernées.

- $P(X \leq 1) = 0,41 + 0,31 = 0,72$.
- $P(X \leq 2) = 0,72 + 0,18 = 0,90$.
- $X \geq 3$ est l'événement contraire de $X \leq 2$:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,90 = 0,10$$

Contrôle direct. $P(X \geq 3) = 0,08 + 0,02 = 0,10$.

Réponse. 0,72 ; 0,90 ; 0,10.

Correction de l'exercice 10 - Une loi impossible

Les probabilités d'une loi doivent avoir pour somme 1 :

$$0,4 + 0,5 + 0,3 = 1,2 \neq 1$$

La loi proposée est **impossible** : elle attribue au total plus que la certitude.

Où est l'erreur ? On ne peut pas le savoir sans l'énoncé : au moins une des trois probabilités est fausse. Par exemple, si $P(X = 0) = 0,4$ et $P(X = 1) = 0,5$ sont justes, alors $P(X = 2)$ vaut nécessairement 0,1.

Réponse. Impossible : la somme vaut 1,2.

Correction de l'exercice 11 - Un nombre de pièces bonnes

Chaque pièce est bonne avec la probabilité 0,95, indépendamment ; X compte les pièces bonnes sur trois (chemins 1 ; 3 ; 3 ; 1).

- $X = 3 : 0,95^3 \approx 0,8574$;
- $X = 2 : 3 \times 0,95^2 \times 0,05 \approx 0,1354$;
- $X = 1 : 3 \times 0,95 \times 0,05^2 \approx 0,0071$;
- $X = 0 : 0,05^3 \approx 0,0001$.

Remarque. Le succès compté est ici « pièce bonne » ; avec le succès « rebut », on obtiendrait la même loi lue à l'envers.

Réponse. $X = 0 : \approx 0,0001$; $1 : \approx 0,0071$; $2 : \approx 0,1354$; $3 : \approx 0,8574$.

Correction de l'exercice 12 - Une loi uniforme

a) Les cinq positions sont équiprobables : chacune a la probabilité $\frac{1}{5} = 0,2$.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

b) $P(X \leq 2) = 0,2 + 0,2 = 0,4$ et $P(X \geq 4) = 0,2 + 0,2 = 0,4$.

Réponse. a) 0,2 chacune — b) 0,4 et 0,4.

Correction de l'exercice 13 - Deux lois à comparer

On peut comparer les deux machines sur un grand nombre de cycles, par exemple 100 :

- machine A : environ 25 cycles à 1 défaut et 5 à 2 défauts, soit $25 + 10 = 35$ défauts ;
- machine B : environ 10 cycles à 1 défaut et 10 à 2 défauts, soit $10 + 20 = 30$ défauts.

En moyenne, la machine **B** produit le moins de défauts (0,30 par cycle contre 0,35), et elle a plus souvent zéro défaut (80 % contre 70 %).

Nuance. B produit plus souvent deux défauts d'un coup (10 % contre 5 %) : si deux défauts ensemble posent un problème particulier, A peut rester préférable.

Réponse. B en moyenne (0,30 défaut par cycle contre 0,35), mais B a plus souvent 2 défauts.

Correction de l'exercice 14 - Reconnaître une variable aléatoire

Une variable aléatoire associe un **nombre** à chaque issue de l'expérience.

- a) **Oui** : le nombre de pièces rebutées est un nombre (de 0 à 10).
- b) **Non** : la couleur d'un voyant n'est pas un nombre. On peut en faire une variable aléatoire en codant, par exemple, 1 pour « rouge » et 0 sinon.
- c) **Oui** : la durée arrondie à la minute est un nombre.

Réponse. a) oui — b) non (sauf codage) — c) oui.

Correction de l'exercice 15 - Retrouver des effectifs

Sur N pièces, l'effectif attendu pour chaque valeur est la probabilité multipliée par l'effectif total :

$$\text{effectif attendu} = N \times P(X = x_i) \quad N = 4000$$

— $X = 0$: $4000 \times 0,55 = 2200$;

— $X = 1$: $4000 \times 0,3 = 1200$;

— $X = 2$: $4000 \times 0,15 = 600$.

Contrôle. $2200 + 1200 + 600 = 4000$. Ce sont des effectifs **attendus** : les effectifs observés fluctueront autour de ces valeurs.

Réponse. 2200 ; 1200 ; 600.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : quatre prélèvements

Chaque pièce est défectueuse avec la probabilité 0,1, indépendamment ; sur quatre pièces, les nombres de chemins selon le nombre de défauts sont 1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1.

a) $P(X = k) = (\text{nombre de chemins}) \times 0,1^k \times 0,9^{4-k}$:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

b) $P(X \leq 1) = 0,6561 + 0,2916 = 0,9477$.

c) $P(X \geq 2) = 1 - 0,9477 = 0,0523$. Sur 500 prélèvements : $500 \times 0,0523 \approx 26$ prélèvements avec au moins deux défauts.

Réponse. a) 0,6561 ; 0,2916 ; 0,0486 ; 0,0036 ; 0,0001 — b) 0,9477 — c) environ 26.