

Plaquette 3 - Espérance : gains, coûts et décisions

Variables aléatoires — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La formule.

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

Sa signification. Sur un grand nombre de répétitions, la moyenne observée se rapproche de $E(X)$.

Cas de Bernoulli. Si X vaut 1 avec la probabilité p et 0 sinon :

$$E(X) = p$$

Gain net. On retranche la mise :

$$E(\text{net}) = E(\text{gain brut}) - \text{mise}$$

Signe de $E(\text{net})$	Lecture
positif	favorable au joueur
nul	jeu équitable
négatif	favorable à l'organisateur

Coût associé. Si chaque valeur de X entraîne un coût, on dresse la loi du coût puis on calcule son espérance avec la même formule.

Décider. On compare les espérances de deux stratégies, puis on nuance par le **risque** encouru.

⚠ L'espérance n'est **pas** une valeur que l'on observera : elle peut même ne pas figurer dans la loi.

Correction de l'exercice 1 - Une première espérance

L'espérance est la somme des produits « valeur $\times$ probabilité » :

$$E(X) = 0 \times 0,62 + 1 \times 0,25 + 2 \times 0,10 + 3 \times 0,03$$

$$E(X) = 0 + 0,25 + 0,20 + 0,09 = 0,54$$

Interprétation. Sur un grand nombre de pièces, on compte en moyenne 0,54 retouche par pièce, soit environ 54 retouches pour 100 pièces.

Réponse. $E(X) = 0,54$ retouche par pièce.

Correction de l'exercice 2 - Une loterie d'atelier

a) Espérance du gain brut G :

$$E(G) = 0 \times 0,9 + 5 \times 0,08 + 50 \times 0,02 = 0,4 + 1 = 1,4$$

b) On retranche la mise de 2 € :

$$E(\text{net}) = 1,4 - 2 = -0,6$$

L'espérance du gain net est **négative** : le jeu est **défavorable** au joueur. Sur un grand nombre de tickets, il perd en moyenne 0,60 € par ticket ; c'est ce qui finance

l'organisateur.

Réponse. a) 1,40 € — b) non : -0,60 € par ticket en moyenne.

Correction de l'exercice 3 - Coût moyen d'une panne

a) Le coût C prend les valeurs 0, 200 et 900 € :

$$E(C) = 0 \times 0,85 + 200 \times 0,10 + 900 \times 0,05 = 20 + 45 = 65$$

Une panne coûte en moyenne 65 €.

b) Sur 60 pannes, on prévoit en moyenne :

$$60 \times 65 = 3900 \text{ €}$$

Prudence. C'est un budget **moyen** : une année avec plus de pannes graves que prévu le dépassera. On ajoute en pratique une marge de sécurité.

Réponse. a) 65 € — b) environ 3900 €.

Correction de l'exercice 4 - Contrat ou réparation au coup par coup

Sans contrat, coût moyen d'une panne :

$$E(C) = 0 \times 0,6 + 150 \times 0,3 + 800 \times 0,1 = 45 + 80 = 125 \text{ €}$$

Avec contrat : 100 € par panne, sans incertitude.

Le contrat fait économiser en moyenne $125 - 100 = 25$ € par panne : on le **conseille**.

Nuance. Sans contrat, 60 % des pannes ne coûtent rien ; mais une panne sur dix coûte 800 €. Le contrat supprime ce risque, ce qui compte pour une petite entreprise.

Réponse. Le contrat : 100 € contre 125 € en moyenne.

Correction de l'exercice 5 - Espérance d'une loi de Bernoulli

a) X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,93$:

$$E(X) = 1 \times 0,93 + 0 \times 0,07 = 0,93$$

b) En moyenne, 93 % des pièces sont conformes. Sur 800 pièces, on attend environ

$$800 \times 0,93 = 744$$

pièces conformes. Le nombre observé fluctuera autour de cette valeur d'un lot à l'autre.

Réponse. a) 0,93 — b) environ 744 pièces conformes sur 800.

Correction de l'exercice 6 - Nombre moyen de défauts

a) On applique la formule avec les valeurs 0 à 4 :

$$E(X) = 0 \times 0,6561 + 1 \times 0,2916 + 2 \times 0,0486 + 3 \times 0,0036 + 4 \times 0,0001$$

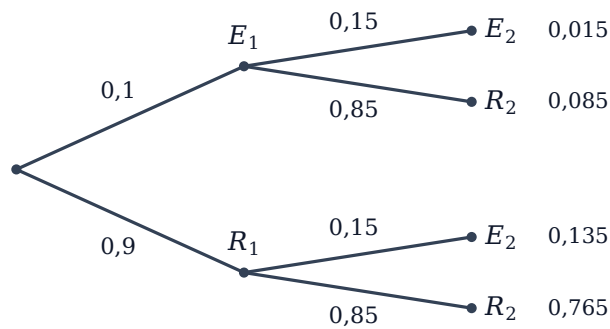
$$E(X) = 0,2916 + 0,0972 + 0,0108 + 0,0004 = 0,4$$

b) On trouve exactement $4 \times 0,1 = 0,4$: sur quatre pièces avec 10 % de défauts, on compte en moyenne 0,4 défaut, c'est-à-dire « nombre de pièces $\times$ taux de défaut ».

Réponse. a) $E(X) = 0,4$ — b) $0,4 = 4 \times 0,1$.

Correction de l'exercice 7 – Un coût lu sur un arbre

a) On construit l'arbre des deux contrôles (E_i : échec, R_i : réussite).



E_i : échec au contrôle i

On lit le coût au bout de chaque chemin :

- deux échecs (E_1E_2) : $C = 40$, probabilité $0,1 \times 0,15 = 0,015$;
- un seul échec (E_1R_2 ou R_1E_2) : $C = 20$, probabilité $0,085 + 0,135 = 0,22$;
- aucun échec (R_1R_2) : $C = 0$, probabilité $0,9 \times 0,85 = 0,765$.

c_i (€)	0	20	40
$P(C = c_i)$	0,765	0,22	0,015

b) Calcul :

$$E(C) = 0 \times 0,765 + 20 \times 0,22 + 40 \times 0,015 = 4,4 + 0,6 = 5$$

Une pièce coûte en moyenne 5 € de reprises : environ 5000 € pour 1000 pièces.

Réponse. a) 0,765 ; 0,22 ; 0,015 — b) $E(C) = 5$ €, soit environ 5000 € pour 1000 pièces.

Correction de l'exercice 8 – Fixer un prix

a) Coût moyen d'un contrat pour l'assureur :

$$E(C) = 0 \times 0,9 + 1500 \times 0,08 + 8000 \times 0,02 = 120 + 160 = 280 \text{ €}$$

b) Pour dégager en moyenne 50 € par contrat, la prime doit couvrir le coût moyen **plus** la marge :

$$280 + 50 = 330 \text{ €}$$

Remarque. La marge n'est garantie qu'en moyenne, sur un grand nombre de contrats : c'est pour cela que l'assurance mutualise les risques.

Réponse. a) 280 € — b) prime de 330 €.

Correction de l'exercice 9 – L'espérance n'est pas une valeur observée

Le nombre de retouches d'une pièce est un **entier** : 0, 1, 2 ou 3. Aucune pièce ne peut avoir 0,54 retouche.

L'espérance est une **moyenne sur un grand nombre de pièces** : sur 1000 pièces, on compte environ 540 retouches au total, réparties de façon inégale (beaucoup de pièces à 0, quelques-unes à 2 ou 3).

Conclusion correcte. « En moyenne, une pièce demande 0,54 retouche ; sur 100 pièces, on prévoit environ 54 retouches. »

Réponse. 0,54 est une moyenne sur beaucoup de pièces, pas une valeur possible de X .

Correction de l'exercice 10 - Comparer deux machines

a) Espérances du nombre de défauts par cycle :

$$E(A) = 1 \times 0,25 + 2 \times 0,05 = 0,35$$

$$E(B) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,1 = 0,3$$

b) En moyenne, la machine **B** fait moins de défauts (0,30 contre 0,35 par cycle).

Réserve. B produit deux défauts d'un coup dans 10 % des cycles, contre 5 % pour A. Si un double défaut bloque la ligne ou coûte bien plus cher, A peut redevenir préférable : l'espérance ne dit pas tout du risque.

Réponse. a) 0,35 et 0,30 — b) B, sous réserve du risque de double défaut.

Correction de l'exercice 11 - Un jeu équitable

Espérance du gain brut :

$$E(G) = 0 \times 0,5 + 3 \times 0,35 + 10 \times 0,15 = 1,05 + 1,5 = 2,55$$

Le jeu est **équitable** quand l'espérance du gain net est nulle :

$$E(G) - m = 0 \Leftrightarrow m = 2,55$$

Contrôle. Avec une mise de 2,55 €, le joueur récupère en moyenne exactement sa mise. Une mise plus élevée rend le jeu défavorable au joueur.

Réponse. $m = 2,55$ €.

Correction de l'exercice 12 - Espérance et effectifs

a) On divise chaque effectif par 2000 :

c_i (€)	50	80	150
$P(C = c_i)$	0,5	0,35	0,15

b) Calcul :

$$E(C) = 50 \times 0,5 + 80 \times 0,35 + 150 \times 0,15 = 25 + 28 + 22,5 = 75,5$$

Contrôle par le total.

$1000 \times 50 + 700 \times 80 + 300 \times 150 = 50\,000 + 56\,000 + 45\,000 = 151\,000$ €, et $151\,000 \div 2000 = 75,5$ €. L'espérance est bien la moyenne des coûts.

Réponse. a) 0,5 ; 0,35 ; 0,15 — b) 75,50 €.

Correction de l'exercice 13 - Un temps de cycle moyen

a) Durée moyenne d'un cycle :

$$E(D) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,1 = 0,4 + 0,6 + 0,6 + 0,4 = 2$$

Un cycle dure en moyenne 2 minutes.

b) 8 heures font 480 minutes, d'où environ

$$480 \div 2 = 240 \text{ cycles}$$

C'est un ordre de grandeur : selon les durées réellement tirées, on fera un peu plus ou un peu moins.

Réponse. a) 2 min — b) environ 240 cycles.

Correction de l'exercice 14 - Espérance d'une loi uniforme

a) Chaque position a la probabilité $\frac{1}{5}$:

$$E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

b) Chaque position a la probabilité $\frac{1}{7}$:

$$E(Y) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Dans les deux cas, l'espérance est la **position du milieu** (3 pour cinq positions, 4 pour sept) : les positions sont placées symétriquement autour d'elle et ont la même probabilité.

Réponse. a) 3 — b) 4, la position du milieu.

Correction de l'exercice 15 - Une décision d'investissement

On compare le coût moyen annuel des rebuts **avant** et **après**.

— Avant : $200\,000 \times 0,06 = 12\,000$ rebuts en moyenne, soit $12\,000 \times 15 = 180\,000$ €.

— Après : $200\,000 \times 0,02 = 4\,000$ rebuts, soit $4\,000 \times 15 = 60\,000$ €.

Économie moyenne : $180\,000 - 60\,000 = 120\,000$ € par an, pour un investissement de 12 000 €.

L'investissement est **rentable dès la première année** : il est remboursé environ dix fois.

Réponse. Oui : environ 120 000 € économisés pour 12 000 € investis.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un atelier de contrôle

a) Nombre moyen de passages :

$$E(N) = 0 \times 0,75 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,05 = 0,3$$

b) Le coût C prend les valeurs 0, 8 et 16 € avec les mêmes probabilités :

$$E(C) = 0 \times 0,75 + 8 \times 0,2 + 16 \times 0,05 = 1,6 + 0,8 = 2,4$$

soit en moyenne 2,40 € par pièce (c'est bien 0,3 passage à 8 €).

c) Pour 150 000 pièces :

$$150\,000 \times 2,4 = 360\,000 \text{ €}$$

Réponse. a) 0,3 passage — b) 2,40 € — c) 360 000 €.