

Plaquette 1 - Loi de probabilité, espérance et fluctuation

Variables aléatoires — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Une **variable aléatoire** X associe un nombre à chaque issue de l'expérience.
- La **loi de probabilité** de X donne toutes les valeurs x_i et leurs probabilités $p_i = P(X = x_i)$, avec

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

- **Espérance** : c'est la valeur moyenne obtenue sur un grand nombre de répétitions,

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

- **Loi de Bernoulli** de paramètre p : X prend la valeur 1 (succès) avec la probabilité p et 0 (échec) avec la probabilité $1 - p$. Alors

$$E(X) = p$$

- Un jeu est **équitable** si l'espérance du gain net est nulle ; il est favorable au joueur si elle est positive.
- **Fluctuation d'échantillonnage** : la fréquence observée d'un succès varie d'un échantillon à l'autre ; elle se rapproche de p quand la taille de l'échantillon augmente.
- La **fréquence** observée est $f = \frac{\text{nombre de succès}}{\text{taille de l'échantillon}}$.

Correction de l'exercice 1 - Dresser une loi de probabilité

On liste les valeurs possibles, puis on compte les issues favorables.

- $X = 5$: une seule issue (le 6), donc $P(X = 5) = \frac{1}{6}$.
- $X = 1$: une seule issue (le 5), donc $P(X = 1) = \frac{1}{6}$.
- $X = 0$: les issues 1, 2, 3, 4, soit 4 issues, donc $P(X = 0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

x_i	0	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Contrôle obligatoire : $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

Réponse. $P(X = 0) = \frac{2}{3}$, $P(X = 1) = P(X = 5) = \frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer une espérance

Formule du cours : $E(X) = \sum x_i p_i$.

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{1+5}{6} = 1$$

- $E(X) = 1$ € : sur un **grand nombre** de parties, le gain moyen par partie est de 1 €.

— Si la partie coûtait 1 €, le jeu serait exactement équitable.

Réponse. $E(X) = 1$ € (gain moyen par partie).

Correction de l'exercice 3 - Compléter une loi

a) La somme des probabilités vaut 1.

— $0,35 + 0,4 + 0,2 = 0,95$, donc $P(X = 10) = 0,05$.

b) $E(X) = -2 \times 0,35 + 0 \times 0,4 + 3 \times 0,2 + 10 \times 0,05$.

— $= -0,7 + 0 + 0,6 + 0,5 = 0,4$.

— L'espérance est positive : en moyenne, la variable prend la valeur 0,4.

Réponse. a) 0,05 · b) $E(X) = 0,4$.

Correction de l'exercice 4 - Loi de Bernoulli

a) X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p = 0,07$:

— $P(X = 1) = 0,07$ et $P(X = 0) = 0,93$.

b) Formule du cours pour une loi de Bernoulli : $E(X) = p = 0,07$.

— Interprétation : sur un grand nombre de prélèvements, la proportion moyenne de pièces défectueuses est 0,07, soit 7 %. L'espérance d'une variable de Bernoulli est exactement la probabilité de succès.

Réponse. a) $P(X = 1) = 0,07$, $P(X = 0) = 0,93$ · b) $E(X) = 0,07$.

Correction de l'exercice 5 - Espérance d'un gain net

a) Les issues 5 et 6 font gagner : $P(\text{gagner}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

— Gain net en cas de gain : $6 - 2 = 4$ € ; en cas de perte : -2 €.

g_i	-2	4
$P(G = g_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

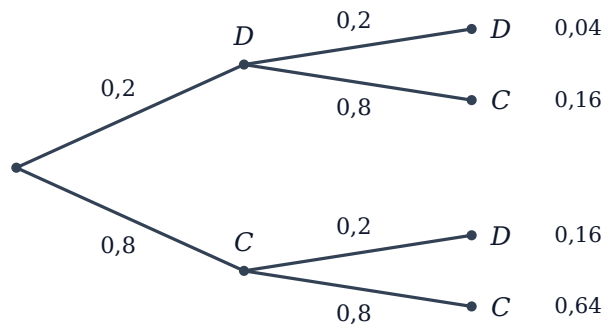
b) $E(G) = -2 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{-4 + 4}{3} = 0$.

— L'espérance est **nulle** : le jeu est exactement **équitable**. Sur un grand nombre de parties, le joueur ne gagne ni ne perd en moyenne.

Réponse. a) -2 avec $\frac{2}{3}$, $+4$ avec $\frac{1}{3}$ · b) jeu équitable ($E(G) = 0$).

Correction de l'exercice 6 - Variable aléatoire et arbre

a) On construit l'arbre des deux prélèvements, avec la probabilité 0,2 de défaut à chaque épreuve.



D : pièce défectueuse

- $X = 0$: un chemin, $0,8 \times 0,8 = 0,64$.
- $X = 1$: deux chemins, $2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,32$.
- $X = 2$: un chemin, $0,2 \times 0,2 = 0,04$.
- Contrôle : $0,64 + 0,32 + 0,04 = 1$.

b) $E(X) = 0 \times 0,64 + 1 \times 0,32 + 2 \times 0,04 = 0,32 + 0,08 = 0,4$.

En moyenne, 0,4 pièce défectueuse sur deux prélèvements. On retrouve $2 \times 0,2 = 0,4$: chaque prélèvement apporte en moyenne 0,2 défaut.

Réponse. a) 0,64 ; 0,32 ; 0,04 · b) $E(X) = 0,4$.

Correction de l'exercice 7 - Coût moyen d'une garantie

a) $C = 180$ avec la probabilité 0,06 ;

- $C = 0$ avec la probabilité 0,94.

b) $E(C) = 180 \times 0,06 + 0 \times 0,94 = 10,80$ €.

- Le coût moyen de garantie est de 10,80 € par appareil.
- Pour 10 000 appareils : $10\,000 \times 10,80 = 108\,000$ € à provisionner.
- C'est ainsi qu'une entreprise fixe le montant de sa provision pour garantie : à partir de l'**espérance**.

Réponse. a) 180 avec 0,06, 0 avec 0,94 · b) $E(C) = 10,80$ € et 108 000 € pour 10 000 appareils.

Correction de l'exercice 8 - Fluctuation d'échantillonnage

a) $f = \frac{\text{effectif}}{50}$:

- $\frac{12}{50} = 0,24$; $\frac{17}{50} = 0,34$; $\frac{19}{50} = 0,38$.

b) C'est la **fluctuation d'échantillonnage** : chaque échantillon est le résultat d'un tirage au hasard, sa fréquence varie autour de la proportion théorique $p = 0,3$ sans lui être égale.

- Les écarts constatés $(-0,06, +0,04, +0,08)$ sont normaux pour $n = 50$. Ils diminueraient avec des échantillons plus grands.

Réponse. a) 0,24 ; 0,34 ; 0,38 · b) fluctuation d'échantillonnage.

Correction de l'exercice 9 - Effet de la taille de l'échantillon

- Petit échantillon : $f_1 = \frac{11}{20} = 0,55$. Écart à $p = 0,4$: 0,15.
- Grand échantillon : $f_2 = \frac{206}{500} = 0,412$. Écart à p : 0,012.
- Le grand échantillon donne une fréquence **beaucoup plus proche** de la proportion théorique.
- Conclusion : plus la taille de l'échantillon augmente, moins la fréquence fluctue. C'est pourquoi les contrôles qualité portent sur des échantillons suffisamment grands.

Réponse. $f_1 = 0,55$ (écart 0,15) et $f_2 = 0,412$ (écart 0,012) : la fluctuation diminue quand n augmente.

Correction de l'exercice 10 - Problème : tarification d'une loterie

- a) Les gains nets possibles sont $100 - 3 = 97$, $20 - 3 = 17$, $5 - 3 = 2$ et $0 - 3 = -3$.
- Tickets perdants : $200 - 1 - 5 - 20 = 174$.

g_i	-3	2	17	97
$P(G = g_i)$	$\frac{174}{200}$	$\frac{20}{200}$	$\frac{5}{200}$	$\frac{1}{200}$

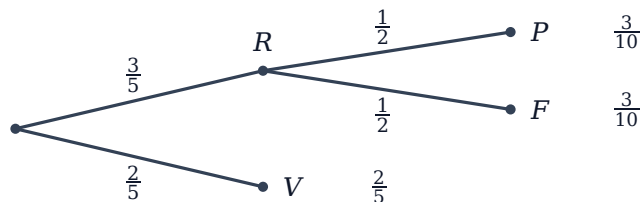
b) $E(G) = \frac{-3 \times 174 + 2 \times 20 + 17 \times 5 + 97 \times 1}{200}$.

- Numérateur : $-522 + 40 + 85 + 97 = -300$.
 - $E(G) = \frac{-300}{200} = -1,50$ €.
 - L'acheteur perd en moyenne 1,50 € par ticket : le jeu est défavorable au joueur.
- c) L'organisateur encaisse $200 \times 3 = 600$ € et redistribue $100 + 5 \times 20 + 20 \times 5 = 300$ € de lots.
- Son bénéfice est de 300 €, ce qui correspond exactement à $200 \times 1,50$ € : la perte moyenne des joueurs est le gain de l'organisateur.

Réponse. b) $E(G) = -1,50$ € (défavorable au joueur) · c) bénéfice de 300 €.

Correction de l'exercice 11 - Un jeu en deux étapes

- a) On construit l'arbre : premier niveau, la couleur ($P(R) = \frac{3}{5}$, $P(V) = \frac{2}{5}$) ; second niveau, la pièce, seulement après une boule rouge.



R : rouge, V : verte, P : pile, F : face

On lit le gain net au bout de chaque chemin :

- rouge puis pile : $10 - 4 = 6$ €, probabilité $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$;
- rouge puis face : $0 - 4 = -4$ €, probabilité $\frac{3}{10}$;

— verte : $2 - 4 = -2$ €, probabilité $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

g_i (€)	-4	-2	6
$P(G = g_i)$	0,3	0,4	0,3

b) Calcul :

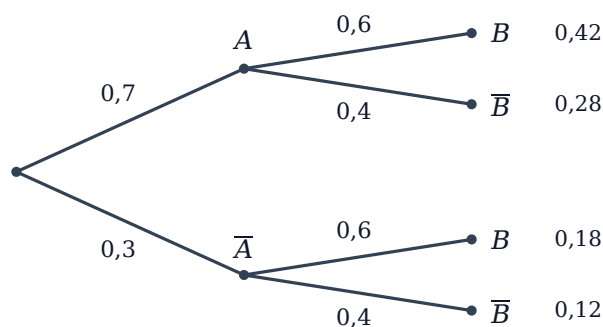
$$E(G) = -4 \times 0,3 - 2 \times 0,4 + 6 \times 0,3 = -1,2 - 0,8 + 1,8 = -0,2$$

L'espérance est **négative** : le jeu est **défavorable** au joueur, qui perd en moyenne 0,20 € par partie.

Réponse. a) $-4 : 0,3 ; -2 : 0,4 ; 6 : 0,3$ — b) $E(G) = -0,2$ € : défavorable.

Correction de l'exercice 12 - Deux tests différents

a) On construit l'arbre des deux tests, A puis B .



A, B : test réussi

- $X = 2$: chemin AB , $0,7 \times 0,6 = 0,42$;
- $X = 1$: chemins $A\bar{B}$ et $\bar{A}B$, $0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,6 = 0,28 + 0,18 = 0,46$;
- $X = 0$: chemin $\bar{A}\bar{B}$, $0,3 \times 0,4 = 0,12$.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,12	0,46	0,42

b) Calcul :

$$E(X) = 0 \times 0,12 + 1 \times 0,46 + 2 \times 0,42 = 0,46 + 0,84 = 1,3$$

c) « Au moins un test » est le contraire de « aucun test » :

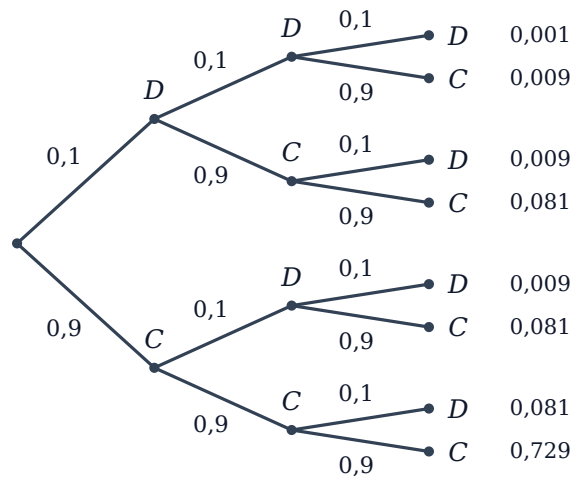
$$P(X \geq 1) = 1 - 0,12 = 0,88$$

Piège. Les deux tests n'ont pas la même probabilité : pour $X = 1$, les deux chemins n'ont pas la même probabilité (0,28 et 0,18), on ne peut pas écrire « $2 \times \dots$ ».

Réponse. a) 0,12 ; 0,46 ; 0,42 — b) 1,3 — c) 0,88.

Correction de l'exercice 13 - Trois prélèvements

a) Chaque chemin comportant k défauts a pour probabilité $0,1^k \times 0,9^{3-k}$. On compte les chemins sur l'arbre : 1 ; 3 ; 3 ; 1 chemins pour 0 ; 1 ; 2 ; 3 défauts.



D : pièce défectueuse

- $X = 0 : 0,9^3 = 0,729$;
- $X = 1 : 3 \times 0,1 \times 0,9^2 = 0,243$;
- $X = 2 : 3 \times 0,1^2 \times 0,9 = 0,027$;
- $X = 3 : 0,1^3 = 0,001$.

Contrôle. $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$.

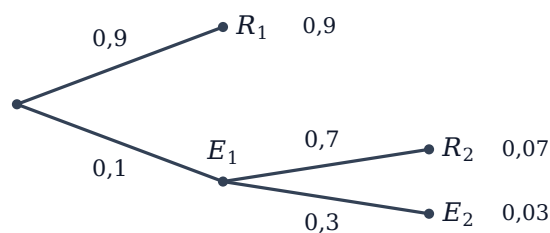
b) $E(X) = 0,243 + 2 \times 0,027 + 3 \times 0,001 = 0,243 + 0,054 + 0,003 = 0,3$, soit $3 \times 0,1$.

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,729 = 0,271$.

Réponse. a) 0,729 ; 0,243 ; 0,027 ; 0,001 — b) 0,3 — c) 0,271.

Correction de l'exercice 14 - Un contrôle avec reprise

a) On construit l'arbre : le second contrôle n'a lieu qu'après un échec au premier.



E_i : échec au contrôle i

- Réussite au premier contrôle : $C = 0$, probabilité 0,9 ;
- échec puis réussite : $C = 15$, probabilité $0,1 \times 0,7 = 0,07$;
- deux échecs : $C = 15 + 25 = 40$, probabilité $0,1 \times 0,3 = 0,03$.

c_i (€)	0	15	40
$P(C = c_i)$	0,9	0,07	0,03

b) Calcul :

$$E(C) = 0 \times 0,9 + 15 \times 0,07 + 40 \times 0,03 = 1,05 + 1,2 = 2,25$$

Une pièce coûte en moyenne 2,25 € de reprise ; pour 2000 pièces, on prévoit $2000 \times 2,25 = 4500$ €.

Réponse. a) $0 : 0,9$; $15 : 0,07$; $40 : 0,03$ — b) 2,25 €, soit 4500 € pour 2000 pièces.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : choisir entre deux contrats

a) $E(N) = 0 \times 0,55 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,1 + 3 \times 0,05 = 0,3 + 0,2 + 0,15 = 0,65$ panne par an.

b) Le coût du contrat B est $2\,500 \times N$, donc son espérance vaut

$$E(\text{coût B}) = 2\,500 \times E(N) = 2\,500 \times 0,65 = 1\,625 \text{ €}$$

c) Le contrat A coûte 1 200 € avec certitude, le contrat B coûte 1 625 € en moyenne.

— **Le contrat A est plus avantageux** en moyenne, et il présente en plus l'avantage d'être prévisible (pas de mauvaise année à 7 500 €).

— Nuance : avec 0 panne (dans 55 % des années), B ne coûte rien. Mais sur plusieurs années, c'est bien l'espérance qui décide.

Réponse. a) 0,65 panne/an · b) 1 625 € · c) le contrat A (1 200 € contre 1 625 €).