

Plaquette 3 - Espérance : gains, coûts et décisions

Variables aléatoires — Première STI2D

Exercices

Méthode

L'espérance est la **valeur moyenne à long terme**. C'est elle qui départage un contrat de maintenance et une réparation au coup par coup, ou qui dit si une loterie est rentable pour l'organisateur.

Exercice 1 - Une première espérance

Nombre de retouches	0	1	2	3
Probabilité	0,62	0,25	0,10	0,03

Calculer le nombre moyen de retouches par pièce.

Exercice 2 - Une loterie d'atelier

Un ticket coûte 2 €. Il ne rapporte rien avec la probabilité 0,9, 5 € avec la probabilité 0,08 et 50 € avec la probabilité 0,02.

- Calculer l'espérance du gain brut.
- Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 3 - Coût moyen d'une panne

Une panne ne coûte rien dans 85 % des cas, 200 € dans 10 % des cas et 900 € dans 5 % des cas.

- Calculer le coût moyen d'une panne.
- Sur 60 pannes par an, quel budget prévoir ?

Exercice 4 - Contrat ou réparation au coup par coup

Sans contrat, une panne coûte 0 € (60 %), 150 € (30 %) ou 800 € (10 %). Un contrat forfaitaire coûte 100 € par panne, quoi qu'il arrive.

Que conseiller ?

Exercice 5 - Espérance d'une loi de Bernoulli

Une pièce est conforme avec la probabilité 0,93. On pose $X = 1$ si elle est conforme, $X = 0$ sinon.

- Calculer $E(X)$.
- Interpréter sur un lot de 800 pièces.

Exercice 6 – Nombre moyen de défauts

On prélève quatre pièces dans une production à 10 % de défauts. La loi du nombre X de défauts est 0,6561 ; 0,2916 ; 0,0486 ; 0,0036 ; 0,0001.

- Calculer $E(X)$.
- Rapprocher du taux de défaut.

Exercice 7 – Un coût lu sur un arbre

Une pièce passe deux contrôles indépendants. Elle échoue au premier avec la probabilité 0,1 et au second avec la probabilité 0,15. Chaque échec entraîne une reprise qui coûte 20 €. On note C le coût des reprises d'une pièce.

- Construire l'arbre pondéré et dresser la loi de C .
- Calculer $E(C)$ et interpréter pour 1000 pièces.

Exercice 8 – Fixer un prix

Un assureur couvre un sinistre coûtant 0 € (90 %), 1500 € (8 %) ou 8000 € (2 %).

- Calculer le coût moyen d'un contrat.
- Quelle prime annuelle pour dégager 50 € de marge ?

Exercice 9 – L'espérance n'est pas une valeur observée

Un élève conclut : « $E(X) = 0,54$ retouche, donc certaines pièces auront 0,54 retouche ». Corriger.

Exercice 10 – Comparer deux machines

Machine A : 0, 1 ou 2 défauts avec les probabilités 0,7 ; 0,25 ; 0,05. Machine B : 0,8 ; 0,1 ; 0,1.

- Calculer les deux espérances.
- Laquelle choisir, et avec quelle réserve ?

Exercice 11 – Un jeu équitable

On mise m euros. On gagne 0 € avec la probabilité 0,5, 3 € avec la probabilité 0,35 et 10 € avec la probabilité 0,15.

Quelle mise rend le jeu équitable ?

Exercice 12 – Espérance et effectifs

Sur 2000 interventions, on relève 1000 interventions à 50 €, 700 à 80 € et 300 à 150 €.

- Dresser la loi du coût.
- Calculer le coût moyen et le contrôler.

Exercice 13 – Un temps de cycle moyen

Un cycle dure 1, 2, 3 ou 4 minutes avec les probabilités 0,4 ; 0,3 ; 0,2 ; 0,1.

- a) Calculer la durée moyenne.
- b) Combien de cycles en 8 heures ?

Exercice 14 – Espérance d’une loi uniforme

Un automate tire au hasard une position parmi 1, 2, 3, 4, 5, de façon équiprobable.

- a) Calculer $E(X)$.
- b) Un second automate tire au hasard parmi sept positions, de 1 à 7. Calculer son espérance et comparer avec la position du milieu.

Exercice 15 – Une décision d’investissement

Une machine coûte 12 000 € et fait passer le taux de rebut de 6 % à 2 %. Un rebut coûte 15 €, la production est de 200 000 pièces par an.

L’investissement est-il rentable en un an ?

Exercice 16 – Synthèse : un atelier de contrôle

Une pièce demande 0, 1 ou 2 passages au contrôle, avec les probabilités 0,75 ; 0,2 ; 0,05. Un passage coûte 8 €.

- a) Calculer le nombre moyen de passages.
- b) En déduire le coût moyen par pièce.
- c) Budget annuel pour 150 000 pièces.