

Plaquette 1 – Loi de probabilité, espérance et fluctuation

Variables aléatoires — Première STI2D

Exercices

Méthode

On définit une variable aléatoire sur une expérience, on dresse sa **loi de probabilité**, on calcule son **espérance** (le gain ou le coût moyen), on traite le cas particulier de la loi de Bernoulli, puis on observe la **fluctuation** des fréquences autour de la probabilité lors de simulations.

Exercice 1 – Dresser une loi de probabilité

On lance un dé équilibré. On gagne 5 € si l'on obtient un 6, 1 € si l'on obtient un 5, et rien sinon. On note X le gain.

Établir la loi de probabilité de X .

Exercice 2 – Calculer une espérance

On reprend la variable X de l'exercice précédent. Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 3 – Compléter une loi

Une variable aléatoire X a la loi suivante.

x_i	-2	0	3	10
$P(X = x_i)$	0,35	0,4	0,2	?

- Déterminer la probabilité manquante.
- Calculer $E(X)$.

Exercice 4 – Loi de Bernoulli

Une pièce est prélevée dans une production comportant 7 % de pièces défectueuses. On note $X = 1$ si elle est défectueuse, $X = 0$ sinon.

- Donner la loi de X .
- Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 5 – Espérance d'un gain net

Une partie coûte 2 €. On lance un dé : on reçoit 6 € si l'on obtient un nombre supérieur ou égal à 5, et rien sinon. On note G le gain **net**.

- Donner la loi de G .
- Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 6 – Variable aléatoire et arbre

On prélève deux pièces indépendamment dans une production comportant 20 % de défauts. On note X le nombre de pièces défectueuses obtenues.

- Donner la loi de X .
- Calculer $E(X)$.

Exercice 7 – Coût moyen d'une garantie

Un appareil tombe en panne pendant la garantie avec la probabilité 0,06. La réparation coûte 180 € au fabricant. On note C le coût de garantie par appareil vendu.

- Donner la loi de C .
- Calculer $E(C)$ et interpréter pour 10 000 appareils vendus.

Exercice 8 – Fluctuation d'échantillonnage

Une production comporte 30 % de pièces de première qualité. On prélève trois échantillons de 50 pièces et on compte 12, 17 et 19 pièces de première qualité.

- Calculer les trois fréquences observées.
- Pourquoi ne sont-elles pas égales à 0,3 ?

Exercice 9 – Effet de la taille de l'échantillon

Dans une production comportant 40 % de pièces d'un certain type, on relève :

- échantillon de 20 pièces : 11 du type visé ;
- échantillon de 500 pièces : 206 du type visé.

Calculer les fréquences et commenter.

Exercice 10 – Problème : tarification d'une loterie

Une kermesse vend 200 tickets. Les lots sont : un lot de 100 €, cinq lots de 20 € et vingt lots de 5 €. Le ticket coûte 3 €.

On note G le gain net d'un acheteur.

- Établir la loi de G .
- Calculer $E(G)$ et conclure pour l'acheteur.
- Quel bénéfice l'organisateur réalise-t-il ?

Exercice 11 – Un jeu en deux étapes

Une urne contient 3 boules rouges et 2 vertes. On mise 4 €, puis on tire une boule au hasard.

- Si elle est verte, on reçoit 2 €.
- Si elle est rouge, on lance une pièce équilibrée : on reçoit 10 € sur pile, rien sur face.

On note G le gain **net** (somme reçue moins la mise).

- Construire l'arbre pondéré et dresser la loi de G .

b) Calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 12 - Deux tests différents

Un prototype passe deux tests indépendants : le test A, réussi avec la probabilité 0,7, et le test B, réussi avec la probabilité 0,6. On note X le nombre de tests réussis.

- Construire l'arbre pondéré et dresser la loi de X .
- Calculer $E(X)$.
- Calculer la probabilité que le prototype réussisse au moins un test.

Exercice 13 - Trois prélèvements

Une production comporte 10 % de pièces défectueuses. On prélève trois pièces indépendamment et on note X le nombre de pièces défectueuses.

- Construire l'arbre pondéré et dresser la loi de X .
- Calculer $E(X)$.
- Calculer la probabilité d'obtenir au moins une pièce défectueuse.

Exercice 14 - Un contrôle avec reprise

Une pièce échoue au premier contrôle avec la probabilité 0,1. Une pièce qui échoue est retouchée pour 15 € puis contrôlée de nouveau ; elle échoue alors avec la probabilité 0,3 et part au rebut, ce qui coûte 25 € de plus. On note C le coût d'une pièce, en euros.

- Construire l'arbre pondéré et dresser la loi de C .
- Calculer $E(C)$ et prévoir le coût pour 2000 pièces.

Exercice 15 - Synthèse : choisir entre deux contrats

Un atelier hésite entre deux contrats de maintenance.

- Contrat A : forfait de 1 200 € par an, aucune autre dépense.
- Contrat B : pas de forfait, mais chaque panne coûte 2 500 €. Le nombre annuel de pannes N a la loi suivante.

n_i	0	1	2	3
$P(N = n_i)$	0,55	0,3	0,1	0,05

- Calculer le nombre moyen de pannes par an.
- Calculer le coût moyen annuel du contrat B.
- Quel contrat conseiller ?