

MATHÉMATIQUES

Variables aléatoires

Première STI2D

Variable aléatoire • Loi de probabilité • $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$ • Espérance
Loi de Bernoulli • Simulation • Échantillon • Fluctuation • Écart type

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe de première** (arrêté du 26 février 2026, BO du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Statistiques et probabilités », section « Variables aléatoires ». Il couvre :

- variable aléatoire discrète : loi de probabilité, écritures $\{X = a\}$ et $\{X \leq a\}$, espérance interprétée en contexte ;
- loi de Bernoulli de paramètre p et son espérance ;
- simulation de N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli ; distance à p des fréquences observées ; dispersion de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$;
- **algorithmes** : simuler un échantillon, compter les fréquences situées dans $[p - ks ; p + ks]$.

Objectif : modéliser une situation par une variable aléatoire, calculer des probabilités et une espérance, reconnaître une loi de Bernoulli et interpréter la fluctuation d'échantillons simulés.

Table des matières

1	Variable aléatoire et loi	3
2	Espérance	3
3	Loi de Bernoulli	3
4	Simuler des échantillons	4
5	Erreurs classiques	5
6	Fiche de synthèse	5
7	Exercices d'application	5
8	Corrigés des exercices	6

1. Variable aléatoire et loi

Variable aléatoire

Une **variable aléatoire** X associe un nombre à chaque issue d'une expérience aléatoire : un nombre de pannes, un coût, un gain... L'événement « X prend la valeur a » se note $\{X = a\}$; « X prend une valeur inférieure ou égale à a » se note $\{X \leq a\}$.

Loi de probabilité

La **loi** de X donne les valeurs possibles $x_1, \dots, x_k$ et les probabilités $P(X = x_i)$, dont la somme vaut 1.

Pannes d'une ligne de production

Le nombre X de pannes d'une ligne au cours d'une semaine suit la loi :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,15	0,05

$\{X = 0\}$: « aucune panne dans la semaine », de probabilité 0,5. $\{X \leq 1\}$: « au plus une panne », de probabilité $P(X = 0) + P(X = 1) = 0,8$. Au moins deux pannes : $P(X \geq 2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

2. Espérance

Espérance

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + \dots + x_kP(X = x_k)$$

C'est la valeur moyenne de X que l'on peut attendre sur un grand nombre de répétitions.

Pour les pannes : $E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,15 + 3 \times 0,05 = 0,75$: en moyenne, 0,75 panne par semaine, soit environ 3 pannes par mois de quatre semaines. Si chaque panne coûte 200 €, le coût moyen est de $0,75 \times 200 = 150$ € par semaine.

Un jeu

Une partie coûte 2 € ; on gagne 10 € avec la probabilité 0,1, 3 € avec la probabilité 0,2, rien sinon. Le gain net G vaut 8, 1 ou -2 : $E(G) = 8 \times 0,1 + 1 \times 0,2 - 2 \times 0,7 = -0,4$. Le joueur perd en moyenne 0,40 € par partie. Un jeu est **équitable** quand l'espérance du gain net est nulle.

3. Loi de Bernoulli

Loi de Bernoulli de paramètre p

Pour une épreuve à deux issues (succès de probabilité p , échec), la variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p :

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p, \quad E(X) = p$$

Un composant pris au hasard dans la production est conforme avec la probabilité 0,95 : la variable « 1 s'il est conforme, 0 sinon » suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,95, d'espérance 0,95.

4. Simuler des échantillons

Simuler une loi de Bernoulli

`random()` renvoie un nombre au hasard entre 0 et 1 : il est inférieur à p avec la probabilité p . Un échantillon de taille n est formé de n tirages indépendants, et l'on calcule la **fréquence des 1**.

```
from random import random

def frequence(n, p):
    compteur = 0
    for k in range(n):
        if random() < p:
            compteur = compteur + 1
    return compteur / n

freqs = [frequence(100, 0.3) for i in range(500)]
```

500 échantillons de taille 100, $p = 0,3$

Une simulation a donné des fréquences comprises entre 0,15 et 0,45, de moyenne 0,299 et d'écart type $s \approx 0,048$. Parmi elles :

- environ 66 % sont dans $[p - s; p + s]$;
- environ 95 % dans $[p - 2s; p + 2s]$;
- la quasi-totalité dans $[p - 3s; p + 3s]$.

Une fréquence observée à plus de $2s$ de p (par exemple 0,42) est une situation **rare** dans ce modèle : elle peut faire douter de la valeur $p = 0,3$, sans le prouver.

Compter les fréquences proches de p

```
def proportion(freqs, p, s, k):
    c = 0
    for f in freqs:
        if p - k*s <= f <= p + k*s:
            c = c + 1
    return c / len(freqs)
```

Taille de l'échantillon et dispersion

L'écart type des fréquences observées est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$: il diminue quand la taille n augmente. Pour diviser la dispersion par k , il faut multiplier la taille de l'échantillon par k^2 .

Dans les simulations ($N = 500$, $p = 0,3$) : $s \approx 0,094$ pour $n = 25$, $0,048$ pour $n = 100$, $0,023$ pour $n = 400$. Quand n est multiplié par 4, la dispersion est divisée par 2 environ.

5. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier de vérifier que la somme des probabilités de la loi vaut 1.
- Confondre $\{X \leq 1\}$ et $\{X < 1\}$ (qui ne contient que $X = 0$ ici).
- Oublier la mise dans le calcul d'un gain net.
- Conclure qu'un modèle est faux à partir d'une seule fréquence un peu éloignée de p .

6. Fiche de synthèse

Loi	valeurs x_i et probabilités $P(X = x_i)$, de somme 1
Événements	$\{X = a\}$; $\{X \leq a\}$: somme des $P(X = x_i)$ pour $x_i \leq a$
Espérance	$E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$: moyenne à long terme ; équitable si $E = 0$
Bernoulli	$P(X = 1) = p$; $E(X) = p$
Simulation	environ 95 % des fréquences à moins de $2s$ de p ; s de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Compléter une loi

X prend les valeurs 0, 1, 2 avec $P(X = 0) = 0,6$ et $P(X = 1) = 0,3$. Calculer $P(X = 2)$, puis $E(X)$.

Exercice 2 – Garantie

Un appareil vendu 300 € avec une extension de garantie de 40 € coûte au vendeur, en réparations sous garantie, 0 € (probabilité 0,85), 100 € (probabilité 0,1) ou 400 € (probabilité 0,05). Calculer le coût moyen des réparations et dire si l'extension est rentable pour le vendeur.

Exercice 3 – Reconnaître une loi de Bernoulli

On lance un dé équilibré à six faces et X vaut 1 si l'on obtient un multiple de 3, 0 sinon. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 4 – Taille d'échantillon

Pour $n = 100$, l'écart type des fréquences simulées vaut environ 0,05. Quelle taille d'échantillon faut-il pour obtenir environ 0,025 ?

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $P(X = 2) = 1 - 0,6 - 0,3 = 0,1$; $E(X) = 0 + 0,3 + 0,2 = 0,5$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $E(C) = 0 \times 0,85 + 100 \times 0,1 + 400 \times 0,05 = 30$ €. L'extension rapporte 40 € et coûte en moyenne 30 € : elle est rentable pour le vendeur (10 € en moyenne par appareil).

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. Les multiples de 3 sont 3 et 6 : $P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(X = 0) = \frac{2}{3}$. Loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$, d'espérance $\frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. Diviser la dispersion par 2 impose de multiplier la taille par $2^2 = 4$: $n = 400$.