

Plaquette 3 - Calculer une dérivée sans erreur

Dérivation et variations — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les dérivées de référence.

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Les deux opérations du programme.

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = k \times u'$$

Dériver un polynôme. On dérive chaque terme :

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Résoudre $f(x) = 0$.

Degré de f	Méthode
1	isoler x
2	discriminant, ou factoriser

Trois pièges à éviter.

△ La constante disparaît : $(x^2 + 7)' = 2x$, et non $2x + 7$.

△ Le coefficient se conserve : $(5x^3)' = 15x^2$, et non $3x^2$.

△ La dérivée de $\frac{k}{x}$ est $-\frac{k}{x^2}$, avec le **signe moins**.

Correction de l'exercice 1 - Les dérivées de référence

a) Fonction constante ✓

— Dérivée :

$$f'(x) = 0$$

— **Interprétation** : la courbe est horizontale, sa pente est nulle ✓

b) Fonction identité ✓

— Dérivée : $f'(x) = 1$ ✓

— **Interprétation** : la droite $y = x$ a pour pente 1 ✓

c) **Fonction carré** ✓— **Dérivée** :

$$f(x) = 2x$$

— **Contrôle** : en $x = 0$ la pente est nulle ✓— **Cohérence** : le sommet de la parabole est en 0 ✓d) **Fonction cube** ✓— **Dérivée** :

$$f(x) = 3x^2$$

— **Signe** : toujours positif ou nul ✓— **Conséquence** : la fonction cube est croissante ✓e) **Fonction inverse** ✓— **Dérivée** :

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

— **Signe** : toujours négatif ✓— **Conséquence** : décroissante sur chaque branche ✓— **Règle générale utilisée** : $(x^n)' = nx^{n-1}$ ✓— **Contrôle sur x^2** : $2x^1 = 2x$ ✓**Réponse.** a) 0 · b) 1 · c) $2x$ · d) $3x^2$ · e) $-\frac{1}{x^2}$.**Correction de l'exercice 2 - Dériver un trinôme**a) **Terme en x^2** : $(3x^2)' = 6x$ ✓— **Terme en x** : $(-5x)' = -5$ ✓— **Constante** : $(7)' = 0$ ✓— **Dérivée** :

$$f(x) = 6x - 5$$

b) **Terme en x^2** : $(-x^2)' = -2x$ ✓— **Terme en x** : $(8x)' = 8$ ✓— **Constante** : disparaît ✓— **Dérivée** :

$$g'(x) = -2x + 8$$

c) **Terme en x^2** : $(0,5x^2)' = x$ ✓— **Détail** : $2 \times 0,5 = 1$ ✓— **Terme en x** : $-2,4$ ✓— **Constante** : disparaît ✓— **Dérivée** :

$$h'(x) = x - 2,4$$

— **Contrôle de a)** en $x = 1$: $f'(1) = 1$ ✓— **Contrôle de b)** en $x = 4$: $g'(4) = 0$ ✓— **Interprétation** : sommet de la parabole en $x = 4$ ✓— **Contrôle de c)** en $x = 2,4$: $h'(2,4) = 0$ ✓

- **Interprétation** : sommet en $x = 2,4$ ✓
- **Règle générale** : le sommet de $ax^2 + bx + c$ est en $-\frac{b}{2a}$ ✓

Réponse. a) $6x - 5 \cdot b) -2x + 8 \cdot c) x - 2,4$.

Correction de l'exercice 3 - Dériver un polynôme de degré 3

a) **Terme en x^3** : $(2x^3)' = 6x^2$ ✓

- **Détail** : $3 \times 2 = 6$ ✓
- **Terme en x^2** : $(-9x^2)' = -18x$ ✓
- **Terme en x** : 12 ✓
- **Constante** : disparaît ✓
- **Dérivée** :

$$f(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

- **Factorisation utile** : $6(x^2 - 3x + 2)$ ✓
- **Racines** : 1 et 2 ✓
- **Contrôle** : $f(1) = 6 - 18 + 12 = 0$ ✓
- **Contrôle** : $f(2) = 24 - 36 + 12 = 0$ ✓

b) **Terme en x^3** : $-3x^2$ ✓

- **Terme en x^2** : $12x$ ✓
- **Constante** : disparaît ✓
- **Dérivée** :

$$g'(x) = -3x^2 + 12x$$

- **Factorisation** : $-3x(x - 4)$ ✓
- **Racines** : 0 et 4 ✓
- **Contrôle** : $g'(4) = -48 + 48 = 0$ ✓
- **Contrôle** : $g'(0) = 0$ ✓
- **Remarque** : une dérivée du second degré donne deux tangentes horizontales ✓

Réponse. a) $6x^2 - 18x + 12 \cdot b) -3x^2 + 12x$.

Correction de l'exercice 4 - Dériver avec la fonction inverse

a) **Terme en x^2** : $2x$ ✓

- **Terme inverse** : $-\frac{1}{x^2}$ ✓
- **Dérivée** :

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

b) **Écriture** : $12 \times \frac{1}{x}$ ✓

- **Règle** : le coefficient se conserve ✓
- **Dérivée** :

$$g'(x) = -\frac{12}{x^2}$$

- **Signe** : toujours négatif ✓
- **Conséquence** : g décroît sur chaque branche ✓

c) **Terme affine** : $(3x)' = 3$ ✓

— **Second terme** : $-5 \times \frac{1}{x}$ ✓

— **Sa dérivée** : $-5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ ✓

— **Simplification** : $+\frac{5}{x^2}$ ✓

— **Dérivée** :

$$h'(x) = 3 + \frac{5}{x^2}$$

— **Signe** : toujours positif ✓

— **Conséquence** : h croît sur chaque branche ✓

— **Piège évité** : deux signes moins donnent un plus ✓

— **Contrôle de b)** en $x = 2$: -3 ✓

— **Contrôle de c)** en $x = 1$: 8 ✓

Réponse. a) $2x - \frac{1}{x^2}$ · b) $-\frac{12}{x^2}$ · c) $3 + \frac{5}{x^2}$.

Correction de l'exercice 5 - Calculer un nombre dérivé

— **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 - 4$ ✓

— **En $x = 2$** : $3 \times 4 - 4$ ✓

— **Produit** : 12 ✓

— **Résultat** :

$$f(2) = 8$$

— **En $x = 0$** : $0 - 4$ ✓

— **Résultat** :

$$f(0) = -4$$

— **En $x = -1$** : $3 \times 1 - 4$ ✓

— **Attention** : $(-1)^2 = 1$ ✓

— **Résultat** : $f(-1) = -1$ ✓

— **Interprétation en $x = 2$** : f croît ✓

— **Interprétation en $x = 0$** : f décroît ✓

— **Interprétation en $x = -1$** : f décroît aussi ✓

— **Tangentes horizontales** : $3x^2 - 4 = 0$ ✓

— **Équation** : $x^2 = \frac{4}{3}$ ✓

— **Solutions approchées** : $\pm 1,155$ ✓

— **Cohérence** : -1 est entre les deux racines ✓

— **Donc** : la dérivée y est négative ✓

— **Concordance avec le calcul** ✓

Réponse. $f(2) = 8$, $f(0) = -4$, $f(-1) = -1$.

Correction de l'exercice 6 - Annuler une dérivée affine

— **Dérivée** : $f(x) = 2x - 10$ ✓

— **Équation** : $2x - 10 = 0$ ✓

— **On ajoute 10** : $2x = 10$ ✓

— **Solution :**

$$x = 5$$

- **Ordonnée :** $f(5) = 25 - 50 + 3 \checkmark$
- **Valeur :** $-22 \checkmark$
- **Interprétation :** tangente horizontale en $(5; -22) \checkmark$
- **Signe de f' avant 5 :** négatif $\checkmark$
- **Contrôle :** $f'(0) = -10 \checkmark$
- **Signe après 5 :** positif $\checkmark$
- **Contrôle :** $f'(8) = 6 \checkmark$
- **Nature de l'extremum :** un **minimum** $\checkmark$
- **Valeur :**

$$-22$$

- **Contrôle par la forme canonique :** $(x - 5)^2 - 22 \checkmark$
- **Développement :** $x^2 - 10x + 25 - 22 \checkmark$
- **Concordance** $\checkmark$
- **Contrôle :** $f(4) = -21 \checkmark$
- **Contrôle :** $f(6) = -21 \checkmark$
- **Confirmation du minimum** $\checkmark$

Réponse. $x = 5$: minimum -22 atteint en $x = 5$.

Correction de l'exercice 7 - Annuler une dérivée du second degré

- **Dérivée :** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \checkmark$
- **Facteur commun :** $3 \checkmark$
- **Factorisation partielle :** $3(x^2 - 4x + 3) \checkmark$
- **Équation à résoudre :** $x^2 - 4x + 3 = 0 \checkmark$
- **Discriminant :** $16 - 12 \checkmark$
- **Valeur :** $\Delta = 4 \checkmark$
- **Racine carrée :** $2 \checkmark$
- **Première racine :** $\frac{4-2}{2} \checkmark$
- **Valeur :** $1 \checkmark$
- **Seconde racine :** $\frac{4+2}{2} \checkmark$
- **Valeur :** $3 \checkmark$
- **Solutions :**

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = 3$$

- **Contrôle :** $f'(1) = 3 - 12 + 9 = 0 \checkmark$
- **Contrôle :** $f'(3) = 27 - 36 + 9 = 0 \checkmark$
- **Ordonnée en 1 :** $1 - 6 + 9 + 1 = 5 \checkmark$
- **Ordonnée en 3 :** $27 - 54 + 27 + 1 = 1 \checkmark$
- **Deux tangentes horizontales :** en $(1; 5)$ et $(3; 1) \checkmark$
- **Forme factorisée utile :** $3(x - 1)(x - 3) \checkmark$

Réponse. $x = 1$ et $x = 3$.

Correction de l'exercice 8 - Résoudre $f'(x) = k$

- **Dérivée** : $f'(x) = 2x + 3$ ✓
- **Équation** : $2x + 3 = 9$ ✓
- **On retranche 3** : $2x = 6$ ✓
- **Solution** :

$$x = 3$$

- **Ordonnée** : $f(3) = 9 + 9$ ✓
- **Valeur** : 18 ✓
- **Point** : (3 ; 18) ✓
- **Équation de la tangente** : $y = 9(x - 3) + 18$ ✓
- **Développement** : $9x - 27 + 18$ ✓
- **Équation** :

$$y = 9x - 9$$

- **Contrôle en $x = 3$** : $27 - 9 = 18$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Unicité** : la dérivée est affine, donc une seule solution ✓
- **Recherche d'une pente -1** : $2x + 3 = -1$ ✓
- **Solution** : $x = -2$ ✓
- **Ordonnée** : $f(-2) = 4 - 6 = -2$ ✓
- **Tangente horizontale** : $2x + 3 = 0$ ✓
- **Abscisse** : $x = -1,5$ ✓
- **C'est le sommet de la parabole** ✓

Réponse. $x = 3$, au point (3 ; 18), tangente $y = 9x - 9$.

Correction de l'exercice 9 - Dériver une fonction de coût

- a) **Terme en x^3** : $3 \times 0,1 = 0,3$ ✓
- **Dérivée partielle** : $0,3x^2$ ✓
 - **Terme en x^2** : $-6x$ ✓
 - **Terme en x** : 40 ✓
 - **Charges fixes** : elles disparaissent ✓
 - **Dérivée** :

$$C'(x) = 0,3x^2 - 6x + 40$$

- b) **En $x = 10$** : $0,3 \times 100 - 60 + 40$ ✓
- **Premier terme** : 30 ✓
 - **Somme** : $30 - 60 + 40$ ✓
 - **Résultat** :

$$C'(10) = 10 \text{ €}$$

- **En $x = 20$** : $0,3 \times 400 - 120 + 40$ ✓
- **Premier terme** : 120 ✓
- **Somme** : $120 - 120 + 40$ ✓
- **Résultat** :

$$C'(20) = 40 \text{ €}$$

- **Interprétation** : la 11^e unité coûte environ 10 € ✓
- **Et la 21^e** : environ 40 € ✓
- **Observation** : le coût marginal remonte ✓
- **Explication** : l'atelier sature ✓
- **Minimum du coût marginal** : $0,6x - 6 = 0$ ✓
- **Abscisse** : $x = 10$ ✓

Réponse. a) $C'(x) = 0,3x^2 - 6x + 40$ · b) 10 € puis 40 €.

Correction de l'exercice 10 - Signe d'une dérivée affine

- **Dérivée** : $f'(x) = -4x + 12$ ✓
- **Annulation** : $-4x + 12 = 0$ ✓
- **Solution** : $x = 3$ ✓
- **Coefficient directeur de f** : -4 ✓
- **Signe** : négatif, donc f décroît ✓
- **Signe de f avant 3** : **positif** ✓
- **Contrôle** : $f'(0) = 12$ ✓
- **Signe après 3** : **négatif** ✓
- **Contrôle** : $f'(5) = -8$ ✓
- **Variations de f** : croissante puis décroissante ✓
- **Nature de l'extremum** : un **maximum** ✓
- **Ordonnée** : $f(3) = -18 + 36 - 7$ ✓
- **Valeur** :

11

- **Cohérence** : $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas ✓
- **Contrôle du sommet** : $-\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-4}$ ✓
- **Valeur** : 3 ✓
- **Concordance** ✓
- **Contrôle** : $f(2) = -8 + 24 - 7 = 9$ ✓
- **Contrôle** : $f(4) = -32 + 48 - 7 = 9$ ✓
- **Confirmation du maximum** ✓

Réponse. $f' > 0$ avant 3, $f' < 0$ après : maximum 11 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 11 - Signe d'une dérivée du second degré

- **Nature** : un trinôme du second degré ✓
- **Coefficient dominant** : 3, positif ✓
- **Discriminant** : $144 - 4 \times 3 \times 9$ ✓
- **Produit** : 108 ✓
- **Valeur** :

$\Delta = 36$

- **Racine carrée** : 6 ✓
- **Première racine** : $\frac{12-6}{6} = 1$ ✓
- **Seconde racine** : $\frac{12+6}{6} = 3$ ✓
- **Règle du signe** : du signe de a à l'extérieur des racines ✓

- **Signe sur $]-\infty; 1[$** : positif ✓
- **Signe sur $]1; 3[$** : négatif ✓
- **Signe sur $]3; +\infty[$** : positif ✓
- **Contrôle** : $f(0) = 9$, positif ✓
- **Contrôle** : $f(2) = 12 - 24 + 9 = -3$, négatif ✓
- **Contrôle** : $f(4) = 48 - 48 + 9 = 9$, positif ✓
- **Variations de f** : croissante, décroissante, croissante ✓
- **Extremums** : un maximum en 1, un minimum en 3 ✓
- **Forme factorisée** : $3(x - 1)(x - 3)$ ✓
- **Contrôle du développement** : $3(x^2 - 4x + 3)$ ✓

Réponse. $f > 0$ sur $]-\infty; 1[$ et $]3; +\infty[$, $f < 0$ sur $]1; 3[$.

Correction de l'exercice 12 - Une dérivée qui ne s'annule jamais

- **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 + 3$ ✓
- **Signe de $3x^2$** : positif ou nul ✓
- **Ajout de 3** : strictement positif ✓
- **Conclusion** :

$$f(x) > 0 \text{ pour tout } x$$
- **Interprétation** : f est croissante sur $\mathbb{R}$ ✓
- **Minimum de la dérivée** : 3, atteint en $x = 0$ ✓
- **Interprétation** : la pente minimale de la courbe vaut 3 ✓
- **Aucune tangente horizontale** ✓
- **Aucun extremum** ✓
- **Contrôle** : $f(-2) = 12 + 3 = 15$ ✓
- **Contrôle** : $f(1) = 6$ ✓
- **Contrôle des images** : $f(-1) = -3$ ✓
- **Et** : $f(0) = 1$ ✓
- **Et** : $f(1) = 5$ ✓
- **Suite croissante de valeurs** ✓
- **Confirmation** ✓
- **Comparaison avec x^3 seul** : elle a une tangente horizontale en 0 ✓
- **Ici** : le terme $+3x$ l'en empêche ✓

Réponse. $f(x) = 3x^2 + 3 > 0$: f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver une fonction

- **Première condition** : $f(1) = -3$ ✓
- **Traduction** : $a + b = -3$ ✓
- **Seconde condition** : tangente horizontale en 1 ✓
- **Traduction** : $f'(1) = 0$ ✓
- **Dérivée** : $f(x) = 2ax + b$ ✓
- **En $x = 1$** : $2a + b = 0$ ✓
- **Système obtenu** : deux équations, deux inconnues ✓
- **Soustraction des deux lignes** : $a = 3$ ✓
- **Détail** : $(2a + b) - (a + b) = 0 - (-3)$ ✓
- **Report dans la première** : $3 + b = -3$ ✓

— **Valeur** : $b = -6$ ✓

— **Résultat** :

$$a = 3 \quad \text{et} \quad b = -6$$

— **Fonction obtenue** : $f(x) = 3x^2 - 6x$ ✓

— **Contrôle** : $f(1) = 3 - 6 = -3$ ✓

— **Dérivée** : $f'(x) = 6x - 6$ ✓

— **Contrôle** : $f'(1) = 0$ ✓

— **Concordance complète** ✓

— **Nature du point** : un minimum ✓

— **Justification** : $a = 3 > 0$ ✓

Réponse. $a = 3$ et $b = -6$, soit $f(x) = 3x^2 - 6x$.

Correction de l'exercice 14 - Repérer trois erreurs

— **Premier terme de l'élève** : $3x^2$ ✓

— **Erreur** : le coefficient 5 a disparu ✓

— **Calcul correct** : $3 \times 5 = 15$ ✓

— **Terme correct** : $15x^2$ ✓

— **Deuxième terme de l'élève** : $-2x$ ✓

— **Vérification** : $(-x^2)' = -2x$ ✓

— **Ce terme est juste** ✓

— **Troisième terme de l'élève** : $+4$ ✓

— **Erreur** : la constante devait disparaître ✓

— **Règle** : $(k)' = 0$ ✓

— **Dérivée correcte** :

$$f'(x) = 15x^2 - 2x$$

— **Contrôle en $x = 0$** : $f'(0) = 0$ ✓

— **Contrôle en $x = 1$** : $15 - 2 = 13$ ✓

— **Tangentes horizontales** : $x(15x - 2) = 0$ ✓

— **Solutions** : $x = 0$ et $x \approx 0,133$ ✓

— **Détail** : $\frac{2}{15} \approx 0,133$ ✓

— **Leçon 1** : un coefficient se multiplie, il ne s'efface pas ✓

— **Leçon 2** : la constante s'efface toujours ✓

— **Leçon 3** : contrôler en dérivant terme par terme, en colonne ✓

Réponse. $f'(x) = 15x^2 - 2x$: le coefficient 5 avait disparu et la constante 4 était restée.

Correction de l'exercice 15 - Comparer deux modèles

a) **Premier coût marginal** :

$$C_1'(x) = 2x + 20$$

— **Second coût marginal** :

$$C_2'(x) = x + 35$$

b) **En $x = 10$, premier modèle** : $20 + 20$ ✓

— **Valeur** : 40 € ✓

— **Second modèle** : $10 + 35$ ✓

- **Valeur** : 45 € ✓
 - **Comparaison** : le premier est moins cher ✓
 - **En $x = 40$, premier modèle** : $80 + 20$ ✓
 - **Valeur** :
100 €
 - **Second modèle** : $40 + 35$ ✓
 - **Valeur** :
75 €
 - **Comparaison** : le second devient moins cher ✓
 - **Point de bascule** : $2x + 20 = x + 35$ ✓
 - **Résolution** : $x = 15$ ✓
 - **Contrôle** : $C_1'(15) = 50$ ✓
 - **Contrôle** : $C_2'(15) = 50$ ✓
 - **Concordance** ✓
 - **Interprétation** : au-delà de 15 unités, le second modèle est plus économe à la marge ✓
 - **Explication** : son terme en x^2 est deux fois plus faible ✓
- Réponse.** a) $2x + 20$ et $x + 35$ · b) 40 € contre 45 €, puis 100 € contre 75 €.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dériver puis exploiter

- a) **Terme en x^3** : $3x^2$ ✓
- **Terme en x^2** : $-6x$ ✓
 - **Terme en x** : -9 ✓
 - **Constante** : disparaît ✓
 - **Dérivée** :

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

- **Facteur commun** : 3 ✓
- **Écriture** : $3(x^2 - 2x - 3)$ ✓
- **Racines évidentes** : -1 et 3 ✓
- **Contrôle du produit** : $-1 \times 3 = -3$ ✓
- **Contrôle de la somme** : $-1 + 3 = 2$ ✓
- **Forme factorisée** :

$$f(x) = 3(x + 1)(x - 3)$$

- b) **Produit nul** ✓

- **Solutions** :

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = 3$$

- **Contrôle** : $f(-1) = 3 + 6 - 9 = 0$ ✓
- **Contrôle** : $f(3) = 27 - 18 - 9 = 0$ ✓

- c) **Image de -1** : $-1 - 3 + 9 + 5$ ✓

- **Valeur** :

$$f(-1) = 10$$

- **Image de 3** : $27 - 27 - 27 + 5$ ✓
- **Valeur** :

$$f(3) = -22$$

- **Nature en -1** : un maximum local ✓
- **Nature en 3** : un minimum local ✓
- **Justification** : f est positive, négative, puis positive ✓

Réponse. a) $f(x) = 3(x + 1)(x - 3)$ · b) $x = -1$ et $x = 3$ · c) $f(-1) = 10$ et $f(3) = -22$.