Plaquette 3 – Calculer une dérivée sans erreur

Dérivation et variations — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les dérivées de référence.

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$

Les deux opérations du programme.

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (ku)' = k \times u'$$

Dériver un polynôme. On dérive chaque terme :

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Résoudre $f'(x) = 0$.

Degré de f	Méthode
1	isoler x
2	factoriser, puis produit nul

Pour factoriser un polynôme du second degré : mettre un facteur en commun, reconnaître une identité remarquable, ou partir d'une **racine évidente** x_1 et écrire $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Trois pièges à éviter.

⚠ La constante disparaît : $(x^2 + 7)' = 2x$, et non $2x + 7$.

⚠ Le coefficient se conserve : $(5x^3)' = 15x^2$, et non $3x^2$.

⚠ On ne dérive pas un produit facteur par facteur : on **développe d'abord**. Par exemple $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$, dont la dérivée est $2x - 1$.

Correction de l'exercice 1 – Les dérivées de référence

On utilise les dérivées du cours et la règle du coefficient :

$$(k)' = 0 \qquad (x)' = 1 \qquad (x^2)' = 2x \qquad (x^3)' = 3x^2 \qquad (ku)' = k \times u'$$

a) Une fonction constante ne varie pas : sa dérivée est nulle, $f'(x) = 0$. Sa courbe est une droite horizontale, de pente 0.

b) $f'(x) = 1$: la droite $y = x$ a pour coefficient directeur 1.

c) $f'(x) = 2x$: la pente de la parabole est nulle en $x = 0$, au sommet.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $f'(x) = 3x^2$, toujours positive ou nulle : la fonction cube est croissante.

e) On garde le coefficient 5 et on dérive x : $f'(x) = 5 \times 1 = 5$.

f) On garde le coefficient -4 et on dérive x^3 : $f'(x) = -4 \times 3x^2 = -12x^2$.

Piège. Le coefficient se conserve : la dérivée de $-4x^3$ n'est pas $3x^2$.

Réponse. a) 0 · b) 1 · c) $2x$ · d) $3x^2$ · e) 5 · f) $-12x^2$.

Correction de l'exercice 2 – Dériver un trinôme

On dérive terme à terme : $(ax^2)' = 2ax$, $(bx)' = b$, et une constante a pour dérivée 0.

a) $(3x^2)' = 6x$, $(-5x)' = -5$ et $(7)' = 0$, donc $f'(x) = 6x - 5$.

b) $(-x^2)' = -2x$ et $(8x)' = 8$, donc $g'(x) = -2x + 8$.

c) $(0{,}5x^2)' = 2 \times 0{,}5x = x$ et $(-2{,}4x)' = -2{,}4$, donc

$$h'(x) = x - 2{,}4$$

Chaque dérivée est affine et s'annule une fois, au sommet de la parabole : en $x = 4$ pour g et en $x = 2{,}4$ pour h.

Contrôle : on dérive un terme à la fois, en recopiant le coefficient. Réponses : $6x - 5$; $-2x + 8$; $x - 2{,}4$.

Réponse. a) $6x - 5$ · b) $-2x + 8$ · c) $x - 2{,}4$.

Correction de l'exercice 3 – Dériver un polynôme de degré 3

On dérive terme à terme avec $(ax^3)' = 3ax^2$, $(ax^2)' = 2ax$ et $(ax)' = a$; la constante disparaît.

a) $(2x^3)' = 6x^2$, $(-9x^2)' = -18x$ et $(12x)' = 12$:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6\left(x^2 - 3x + 2\right) = 6(x - 1)(x - 2)$$

La factorisation se vérifie en développant ; elle montre que f' s'annule en 1 et en 2.

b) $(-x^3)' = -3x^2$ et $(6x^2)' = 12x$, donc $g'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$, qui s'annule en 0 et en 4.

Une dérivée du second degré qui s'annule deux fois signale deux tangentes horizontales. Réponses : $6x^2 - 18x + 12$; $-3x^2 + 12x$.

Réponse. a) $6x^2 - 18x + 12$ · b) $-3x^2 + 12x$.

Correction de l'exercice 4 – Développer avant de dériver

Le programme ne donne pas de règle pour dériver un produit : on **développe d'abord**, puis on dérive le polynôme obtenu terme à terme.

a) Développement :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$$

— $f'(x) = 2x - 1$.

b) On développe d'abord le carré avec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$. Puis on multiplie par x :

$$g(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$$

— $g'(x) = 3x^2 - 16x + 16$.

c) $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$, donc $h'(x) = 8x - 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Piège. Dériver chaque facteur et multiplier les résultats donne un résultat faux : pour a), on obtiendrait $1 \times 1 = 1$ au lieu de $2x - 1$.

Réponse. a) $2x - 1$ · b) $3x^2 - 16x + 16$ · c) $8x - 4$.

Correction de l'exercice 5 – Calculer un nombre dérivé

On dérive d'abord : $f'(x) = 3x^2 - 4$. On remplace ensuite x par chaque valeur, en mettant les nombres négatifs entre parenthèses.

— $f'(2) = 3 \times 4 - 4 = 8$.
— $f'(0) = 0 - 4 = -4$.
— $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 4 = 3 - 4 = -1$.

$$f'(2) = 8 \qquad f'(0) = -4 \qquad f'(-1) = -1$$

Le signe de chaque nombre dérivé indique le sens de variation au voisinage du point : f croît en 2, décroît en 0 et en -1. Les tangentes horizontales correspondent à $3x^2 = 4$, soit $x \approx \pm 1{,}155$; -1 et 0 sont entre ces deux valeurs, là où la dérivée est négative. Réponses : 8, -4 et -1.

Réponse. $f'(2) = 8$, $f'(0) = -4$, $f'(-1) = -1$.

Correction de l'exercice 6 – Annuler une dérivée affine

On dérive : $f'(x) = 2x - 10$. On résout $f'(x) = 0$:

$$2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

En ce point, la tangente est horizontale, et $f(5) = 25 - 50 + 3 = -22$.

Pour interpréter, on étudie le signe de f' : négatif avant 5, positif après. La fonction décroît puis croît : elle atteint son **minimum** en $x = 5$.

Contrôle : $f(4) = f(6) = -21$, plus grand que -22. La dérivée s'annule en $x = 5$, où f atteint son minimum -22.

Réponse. $x = 5$: minimum -22 atteint en $x = 5$.

Correction de l'exercice 7 – Annuler une dérivée du second degré

a) On dérive terme à terme : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. On remplace x par 1 :

$$f'(1) = 3 - 12 + 9 = 0$$

— Donc 1 est bien une racine de f'.

b) On met d'abord 3 en facteur : $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$. Comme 1 est racine, on cherche $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - b)$. En développant, le terme constant vaut $(-1) \times (-b) = b$; il doit être égal à 3, donc $b = 3$.

— Contrôle : $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 3x - x + 3 = x^2 - 4x + 3$.
— Ainsi $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.

c) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$3(x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

— $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$.
— Les tangentes horizontales sont aux points $(1\,;5)$ et $(3\,;1)$.

Réponse. a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f'(1) = 0$ · b) $b = 3$ · c) $x = 1$ ou $x = 3$; points $(1\,;5)$ et $(3\,;1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Résoudre f'(x) = k

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x est $f'(x) = 2x + 3$. On cherche donc les x tels que

$$2x + 3 = 9 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

La dérivée est affine : cette équation n'a qu'une solution. Le point de contact est $(3\,;f(3)) = (3\,;18)$, et la tangente a pour équation $y = 9(x - 3) + 18 = 9x - 9$.

De la même façon, la tangente a une pente -1 en $x = -2$, et elle est horizontale en $x = -1{,}5$, au sommet de la parabole.

Contrôle : en $x = 3$, $9 \times 3 - 9 = 18 = f(3)$. Il y a un seul point, $x = 3$, soit $(3\,;18)$, avec la tangente $y = 9x - 9$.

Réponse. $x = 3$, au point $(3\,;18)$, tangente $y = 9x - 9$.

Correction de l'exercice 9 – Dériver une fonction de coût

a) On dérive terme à terme ; les charges fixes, 200 €, ont une dérivée nulle :

$$C'(x) = 3 \times 0{,}1x^2 - 2 \times 3x + 40 = 0{,}3x^2 - 6x + 40$$

b) $C'(10) = 30 - 60 + 40 = 10$ € et $C'(20) = 120 - 120 + 40 = 40$ €.

Le coût marginal approche le coût d'une unité supplémentaire : la 11^{e} unité coûte environ 10 €, la 21^{e} environ 40 €. Il diminue d'abord, puis remonte quand l'atelier approche de ses limites ; il est le plus bas en $x = 10$, là où sa propre dérivée $0{,}6x - 6$ s'annule.

Réponses : $C'(x) = 0{,}3x^2 - 6x + 40$; 10 **€** puis 40 **€**.

Réponse. a) $C'(x) = 0{,}3x^2 - 6x + 40$ · b) 10 € puis 40 €.

Correction de l'exercice 10 – Signe d'une dérivée affine

On dérive : $f'(x) = -4x + 12$. Cette fonction affine s'annule en $x = 3$, et son coefficient -4 est négatif : elle est positive avant 3 et négative après.

$$f'(x) > 0 \text{ pour } x < 3 \qquad f'(x) < 0 \text{ pour } x > 3$$

La fonction f est donc croissante sur $]-\infty\,;3]$ et décroissante sur $[3\,;+\infty[$: elle atteint un **maximum** en $x = 3$, égal à $f(3) = -18 + 36 - 7 = 11$.

C'est cohérent avec la forme de la courbe : le coefficient de x^2, -2, est négatif, la parabole est tournée vers le bas. **Contrôle** : $f(2) = f(4) = 9 < 11$. Le maximum vaut 11, atteint en $x = 3$.

Réponse. $f' > 0$ avant 3, $f' < 0$ après : maximum 11 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 11 – Signe d'une dérivée du second degré

a) $f'(-1) = -2 - 4 + 6 = 0$: -1 est racine. On met -2 en facteur :

$$f'(x) = -2(x^2 - 2x - 3)$$

— Comme -1 est racine, $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - b)$. Le terme constant vaut $1 \times (-b) = -b$, égal à -3 : donc $b = 3$.
— Contrôle : $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 - 2x - 3$.
— Ainsi $f'(x) = -2(x + 1)(x - 3)$.

b) Chaque facteur du premier degré change de signe en sa racine ; le facteur -2 est toujours négatif.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x	$]-\infty\,;-1[$	$]-1\,;3[$	$]3\,;+\infty[$
-2	$-$	$-$	$-$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

— Contrôles : $f'(0) = 6 > 0$ et $f'(4) = -32 + 16 + 6 = -10 < 0$.

c) Le signe de f' donne les variations : f est **décroissante** sur $]-\infty\,;-1]$, **croissante** sur $[-1\,;3]$, puis **décroissante** sur $[3\,;+\infty[$. Elle admet un minimum local en $x = -1$ et un maximum local en $x = 3$.

Réponse. $f'(x) = -2(x+1)(x-3)$; $f' < 0$ sur $]-\infty\,;-1[$ et $]3\,;+\infty[$, $f' > 0$ sur $]-1\,;3[$.

Correction de l'exercice 12 – Une dérivée qui ne s'annule jamais

On dérive : $f'(x) = 3x^2 + 3$. Un carré est positif ou nul, donc $3x^2 \geq 0$, et en ajoutant 3 :

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$$

pour tout réel x. La dérivée est strictement positive : f est **croissante** sur $\mathbb{R}$. La courbe n'a aucune tangente horizontale et aucun extremum ; sa pente vaut au moins 3.

Sans le terme $3x$, la fonction x^3 aurait une tangente horizontale en 0 ; ici, le terme $+3x$ l'empêche.

Contrôle : $f(-1) = -3$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 5$, des valeurs qui augmentent. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Réponse. $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$: f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13 – Retrouver une fonction

Chaque renseignement donne une équation.

— $f(1) = -3$ s'écrit $a + b = -3$.

— La tangente est horizontale en 1, donc $f'(1) = 0$. Avec $f'(x) = 2ax + b$, cela donne $2a + b = 0$.

On résout le système en soustrayant la première équation de la seconde :

$$(2a + b) - (a + b) = 0 - (-3) \Leftrightarrow a = 3$$

puis $3 + b = -3$, donc $b = -6$. La fonction est $f(x) = 3x^2 - 6x$.

Contrôle : $f(1) = 3 - 6 = -3$ et $f'(x) = 6x - 6$ s'annule bien en 1. Comme $a = 3 > 0$, ce point est un minimum. Réponse : $a = 3$ et $b = -6$.

Réponse. $a = 3$ et $b = -6$, soit $f(x) = 3x^2 - 6x$.

Correction de l'exercice 14 – Repérer trois erreurs

On dérive terme à terme et l'on compare avec la réponse de l'élève.

— $(5x^3)' = 3 \times 5x^2 = 15x^2$. L'élève a écrit $3x^2$: il a **perdu le coefficient** 5, qui se multiplie et ne s'efface pas.

— $(-x^2)' = -2x$: ce terme est juste.

— $(4)' = 0$: la constante devait **disparaître**, l'élève l'a recopiée.

$$f'(x) = 15x^2 - 2x$$

C'est ainsi deux erreurs de calcul et une troisième, de méthode : ne pas avoir dérivé

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

terme par terme. **Méthode** : écrire chaque terme et sa dérivée en colonne, puis additionner. La dérivée correcte, qui s'annule en 0 et en $\frac{2}{15}$, est $f'(x) = 15x^2 - 2x$.

Réponse. $f'(x) = 15x^2 - 2x$: le coefficient 5 avait disparu et la constante 4 était restée.

Correction de l'exercice 15 – Comparer deux modèles

a) On dérive terme à terme ; les coûts fixes disparaissent :

$$C_1'(x) = 2x + 20 \qquad C_2'(x) = x + 35$$

b) En $x = 10$: $C_1'(10) = 40$ € et $C_2'(10) = 45$ € ; le premier modèle a le coût marginal le plus faible. En $x = 40$: $C_1'(40) = 100$ € et $C_2'(40) = 75$ € ; c'est désormais le second.

Les deux coûts marginaux sont égaux quand $2x + 20 = x + 35$, soit $x = 15$: au-delà de 15 unités, le second modèle est plus économe à la marge, car son coût marginal augmente deux fois moins vite.

Réponses : $2x + 20$ et $x + 35$; 40 **€ contre** 45 **€**, puis 100 **€ contre** 75 **€**.

Réponse. a) $2x + 20$ et $x + 35$ · b) 40 € contre 45 €, puis 100 € contre 75 €.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : dériver puis exploiter

a) On dérive terme à terme, puis on met 3 en facteur :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3\left(x^2 - 2x - 3\right) = 3(x + 1)(x - 3)$$

La factorisation se vérifie en développant : $(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$.

b) Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est : $f'(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 3$.

c) $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$ et $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.

La dérivée est positive avant -1, négative entre -1 et 3, positive après : f admet un maximum local 10 en -1 et un minimum local -22 en 3.

Réponses : $f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$; $x = -1$ et $x = 3$; $f(-1) = 10$ et $f(3) = -22$.

Réponse. a) $f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)$ · b) $x = -1$ et $x = 3$ · c) $f(-1) = 10$ et $f(3) = -22$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).