Plaquette 2 – Nombre dérivé et tangentes

Dérivation et variations — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le taux de variation. Entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

C'est le coefficient directeur de la **sécante** joignant les deux points.

Le nombre dérivé. $f'(a)$ est la valeur vers laquelle tend ce taux quand h devient très petit. C'est le coefficient directeur de la **tangente** au point d'abscisse a.

L'équation de la tangente.

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Élément	Rôle
$f(a)$	l'**ordonnée** du point de contact
$f'(a)$	la **pente** de la tangente
a	l'abscisse du point de contact

Lecture graphique. Une tangente passant par deux points $(x_1\,;y_1)$ et $(x_2\,;y_2)$ a pour pente :

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Les trois signes.

Signe de $f'(a)$	Tangente	Allure de la courbe
positif	montante	f croît au voisinage de a
négatif	descendante	f décroît au voisinage de a
nul	**horizontale**	souvent un extremum

Dérivées utiles ici. $(x^2)'=2x$, $(x^3)'=3x^2$, $(ax+b)'=a$, $(u+v)'=u'+v'$ et $(ku)'=k\times u'$.

⚠ Ne pas confondre $f(a)$, qui est une **hauteur**, et $f'(a)$, qui est une **pente**.

Correction de l'exercice 1 – Taux de variation entre deux points

Le taux de variation de f entre a et b est le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$: la variation des images divisée par la variation de x.

a) Entre 1 et 4 : $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{16-1}{3}=5$.

b) Entre 2 et 5 : $\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}=\dfrac{25-4}{3}=7$.

c) Chaque taux est la pente de la sécante qui joint les deux points de la courbe, c'est-à-dire la variation moyenne de f par unité sur l'intervalle. Le second est plus grand :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$7 > 5$$

plus on avance vers la droite, plus la parabole monte vite. Ce n'est pas encore un nombre dérivé, qui concerne un seul point.

Contrôle : entre 0 et 3, le taux vaut $\dfrac{9-0}{3} = 3$, plus petit encore. Réponses : 5 ; 7 ; pentes des sécantes, qui augmentent.

Réponse. a) 5 · b) 7 · c) ce sont les pentes des sécantes, et elles augmentent.

Correction de l'exercice 2 – Du taux au nombre dérivé

a) On développe avec l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
$f(3+h) = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$.

b) Le taux de variation entre 3 et $3+h$ vaut

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h$$

pour $h \neq 0$.

c) Quand h devient très proche de 0, le taux $6+h$ se rapproche de 6 : c'est le nombre dérivé, $f'(3) = 6$. Par exemple, pour $h = 0{,}1$, $0{,}01$ et $0{,}001$, le taux vaut 6,1, 6,01 et 6,001.

La tangente à la courbe au point d'abscisse 3 a donc pour pente 6, ce que confirme la formule $f'(x) = 2x$. Réponses : $9 + 6h + h^2$; $6 + h$; $f'(3) = 6$.

Réponse. a) $9 + 6h + h^2$ · b) $6 + h$ · c) $f'(3) = 6$.

Correction de l'exercice 3 – Le cas d'une fonction affine

a) On calcule les deux images et l'on simplifie :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{5(a+h) - 2 - (5a - 2)}{h} = \frac{5h}{h} = 5$$

Le taux ne dépend ni de a ni de h.

b) Il vaut toujours 5, donc sa valeur quand h se rapproche de 0 est aussi 5 : $f'(a) = 5$ pour tout a.

c) La courbe de f est une droite de pente 5 : sa tangente en chaque point est la droite elle-même. Plus généralement, $(ax+b)' = a$, par exemple $(-3x+7)' = -3$; et une constante a pour dérivée 0, car sa droite est horizontale.

Réponses : 5 ; $f'(a) = 5$; la tangente à une droite est la droite elle-même.

Réponse. a) 5 · b) $f'(a) = 5$ · c) la tangente à une droite est la droite elle-même.

Correction de l'exercice 4 – Lire un nombre dérivé

a) Le nombre dérivé $f'(2)$ est la pente de la tangente en 2. On la calcule avec les deux points donnés :

$$f'(2) = \frac{7-1}{2-0} = 3$$

b) Le point de contact a pour abscisse 2 et il est sur la tangente : c'est le point $(2\,;7)$, donc $f(2) = 7$.

c) On applique la formule $y = f'(2)(x-2) + f(2)$: $y = 3(x-2) + 7 = 3x + 1$.

La pente est positive : f est croissante au voisinage de 2.

Contrôle : la droite $y = 3x + 1$ passe bien par $(0\,;1)$ et par $(2\,;7)$. Réponses : $f'(2) = 3$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f(2) = 7$; $y = 3x + 1$.

Réponse. a) $f'(2) = 3$ · b) $f(2) = 7$ · c) $y = 3x + 1$.

Correction de l'exercice 5 – Signe du nombre dérivé

Le signe du nombre dérivé est celui de la pente de la tangente.

— En $x = -1$, la tangente descend : $f'(-1) < 0$, et f décroît autour de -1.
— En $x = 2$, elle est horizontale : $f'(2) = 0$.
— En $x = 5$, elle monte : $f'(5) > 0$, et f croît autour de 5.

Si la dérivée passe ainsi du négatif au positif autour de 2, la fonction décroît puis croît : elle atteint un **minimum** en 2.

$$f'(-1) < 0 \qquad f'(2) = 0 \qquad f'(5) > 0$$

Attention : une tangente horizontale ne suffit pas à elle seule. Pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, mais la dérivée $3x^2$ reste positive des deux côtés de 0, et il n'y a pas d'extremum. C'est le **changement de signe** de f' qui garantit un extremum.

Réponse. $f'(-1) < 0$, $f'(2) = 0$, $f'(5) > 0$: f décroît puis croît, avec un minimum en 2.

Correction de l'exercice 6 – Équation de tangente

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$: il faut l'image et le nombre dérivé en 3.

— $f(3) = 9 - 12 + 7 = 4$.
— $f'(x) = 2x - 4$, donc $f'(3) = 2$.

$$y = 2(x - 3) + 4 = 2x - 2$$

Contrôle : en $x = 3$, la tangente donne $y = 4 = f(3)$, et sa pente vaut $2 = f'(3)$. En $x = 4$, la courbe vaut 7 et la tangente 6 : la parabole, tournée vers le haut, est au-dessus de sa tangente. La tangente a pour équation $y = 2x - 2$.

Réponse. $y = 2x - 2$.

Correction de l'exercice 7 – Une parabole descendante

On calcule l'image et le nombre dérivé en 1, puis on applique la formule de la tangente.

— $f(1) = -2 + 5 + 1 = 4$.
— $f'(x) = -4x + 5$, donc $f'(1) = 1$.

$$y = 1 \times (x - 1) + 4 = x + 3$$

La pente est positive : f croît encore en $x = 1$. C'est cohérent : la dérivée $-4x + 5$ s'annule en $x = 1{,}25$, sommet de la parabole, et 1 est situé avant ce sommet.

Contrôle : en $x = 1$, la tangente donne $y = 4 = f(1)$. La tangente a pour équation $y = x + 3$.

Réponse. $y = x + 3$.

Correction de l'exercice 8 – Tangentes à une courbe de degré 3

On dérive terme à terme avec $(x^3)' = 3x^2$ et $(x)' = 1$; la constante disparaît :

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

a) On applique la formule de la tangente avec $a = 2$:

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$ et $f'(2) = 3 \times 4 - 3 = 9$.
— $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15$.
— Contrôle : pour $x = 2$, $9 \times 2 - 15 = 3 = f(2)$.

b) Avec $a = 0$: $f(0) = 1$ et $f'(0) = -3$, donc $y = -3(x - 0) + 1 = -3x + 1$.

c) Une tangente est horizontale quand le nombre dérivé est nul : $3x^2 - 3 = 0$. On factorise :

$$3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

— Le produit est nul pour $x = 1$ ou $x = -1$.
— $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$ et $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$.
— Les tangentes horizontales sont aux points $(1\,;-1)$ et $(-1\,;3)$.

Réponse. a) $y = 9x - 15$ · b) $y = -3x + 1$ · c) aux points $(1\,;-1)$ et $(-1\,;3)$.

Correction de l’exercice 9 – Tangente horizontale

Une tangente est horizontale quand sa pente est nulle, donc quand $f'(x) = 0$. Ici $f'(x) = 2x - 6$, qui s’annule pour $x = 3$. L’ordonnée du point vaut

$$f(3) = 9 - 18 + 11 = 2$$

La tangente en $(3\,;2)$ a pour pente 0 : son équation est $y = 2$.

La dérivée est négative avant 3, par exemple $f'(0) = -6$, et positive après, par exemple $f'(5) = 4$: la fonction décroît puis croît, et 2 est son minimum.

Contrôle : $f(2) = f(4) = 3$, plus grand que 2. La tangente est horizontale au point $(3\,;2)$, d’équation $y = 2$.

Réponse. Au point $(3\,;2)$, tangente d’équation $y = 2$.

Correction de l’exercice 10 – Tangente parallèle à une droite

Deux droites sont parallèles quand elles ont le même coefficient directeur. La tangente doit donc avoir une pente égale à 4 : on résout $f'(x) = 4$, avec $f'(x) = 2x - 2$.

$$2x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 3$$

Le point de contact a pour ordonnée $f(3) = 9 - 6 = 3$. La tangente a pour équation $y = 4(x - 3) + 3 = 4x - 9$.

Elle a la même pente que $y = 4x + 9$, mais une ordonnée à l’origine différente : les deux droites sont parallèles et distinctes.

Contrôle : en $x = 3$, $4 \times 3 - 9 = 3 = f(3)$. Le point cherché est $(3\,;3)$, et la tangente a pour équation $y = 4x - 9$.

Réponse. Au point $(3\,;3)$, tangente d’équation $y = 4x - 9$.

Correction de l’exercice 11 – Remonter à f(a) et f’(a)

La tangente au point d’abscisse 2 a pour pente $f'(2)$: on lit le coefficient directeur de $y = 5x - 3$, donc $f'(2) = 5$.

Le point de contact est à la fois sur la courbe et sur la tangente : son ordonnée, $f(2)$, se calcule avec l’équation de la tangente en $x = 2$.

$$f(2) = 5 \times 2 - 3 = 7$$

Contrôle : la formule $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 5(x - 2) + 7 = 5x - 3$ redonne bien l’équation de l’énoncé.

Piège : confondre les rôles. $f(2) = 7$ est une hauteur, $f'(2) = 5$ une pente, et l’ordonnée à

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

l'origine -3 n'est ni l'une ni l'autre. Réponses : $f(2) = 7$ et $f'(2) = 5$.

Réponse. $f(2) = 7$ et $f'(2) = 5$.

Correction de l'exercice 12 – Approximation par la tangente

a) $f(3) = 9$ et, avec $f'(x) = 2x$, $f'(3) = 6$. La tangente a pour équation $y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$.

b) Près du point de contact, la courbe se confond presque avec sa tangente : on remplace $3{,}02^2$ par la valeur de la tangente en 3,02.

$$6 \times 3{,}02 - 9 = 18{,}12 - 9 = 9{,}12$$

c) La valeur exacte est $3{,}02^2 = 9{,}1204$: l'écart n'est que de 0,0004, car on est très près de 3. En s'éloignant, l'approximation se dégrade : pour 3,1, la tangente donne 9,6 contre 9,61, soit un écart de 0,01. La tangente reste en dessous de cette parabole tournée vers le haut.

Réponses : $y = 6x - 9$; estimation 9,12 ; écart de 0,0004.

Réponse. a) $y = 6x - 9$ · b) 9,12 · c) exact 9,1204, écart 0,0004.

Correction de l'exercice 13 – Coût marginal et tangente

a) Le coût marginal est la dérivée du coût : $C'(x) = 4x + 30$, donc

$$C'(20) = 4 \times 20 + 30 = 110 \text{ €}$$

b) Le coût réel de la 21^{e} unité est la différence entre le coût de 21 unités et celui de 20 unités : $C(21) = 882 + 630 + 500 = 2012$ € et $C(20) = 800 + 600 + 500 = 1900$ €, soit 112 €.

c) Les deux valeurs ne diffèrent que de 2 € : le coût marginal est une très bonne approximation du coût de l'unité suivante, car c'est une approximation par la tangente.

Le coût marginal augmente avec la production, par exemple $C'(50) = 230$ € : chaque unité supplémentaire coûte un peu plus cher que la précédente. Réponses : 110 **€** ; 112 **€** ; très bonne approximation.

Réponse. a) 110 € · b) 112 € · c) le coût marginal est une très bonne approximation.

Correction de l'exercice 14 – Deux tangentes parallèles

a) $f'(x) = 3x^2$. Le carré efface le signe : $f'(1) = 3$ et $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$.

b) Les deux tangentes ont la même pente : elles sont **parallèles**. Pour savoir si elles sont confondues, il faut comparer leurs équations.

c) En $x = 1$: $f(1) = 1$, d'où $y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$. En $x = -1$: $f(-1) = -1$, d'où $y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2$.

$$y = 3x - 2 \qquad y = 3x + 2$$

Les ordonnées à l'origine sont différentes : les tangentes sont parallèles et **distinctes**.

Remarque : la tangente est horizontale en $x = 0$, où $3x^2 = 0$, sans que ce soit un extremum. Réponses : $f'(1) = f'(-1) = 3$; parallèles ; $y = 3x - 2$ et $y = 3x + 2$.

Réponse. a) $f'(1) = f'(-1) = 3$ · b) elles sont parallèles · c) $y = 3x - 2$ et $y = 3x + 2$.

Correction de l'exercice 15 – Repérer une erreur

L'élève fait trois erreurs.

Première erreur : il confond $f(3)$ et $f'(3)$. On a bien $f(3) = 9 - 12 + 7 = 4$, mais $f'(3)$ s'obtient en dérivant d'abord : $f'(x) = 2x - 4$, donc $f'(3) = 2$. Le premier nombre est une

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

hauteur, le second une pente.

Deuxième et troisième erreurs : la droite $y = 4x$ n'utilise pas la bonne formule, et elle ne passe même pas par le point de contact, puisqu'elle donne 12 en $x = 3$ au lieu de 4. La formule correcte est $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$:

$$y = 2(x - 3) + 4 = 2x - 2$$

Contrôle : en $x = 3$, $y = 4$, et la pente vaut 2. **Méthode** : calculer $f(a)$, puis dériver et calculer $f'(a)$, enfin appliquer la formule. La tangente correcte est $y = 2x - 2$.

Réponse. $f(3) = 4$ mais $f'(3) = 2$: la tangente est $y = 2x - 2$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : deux tangentes d'une parabole

a) $f(1) = 1 - 8 + 20 = 13$ et, avec $f'(x) = 2x - 8$, $f'(1) = -6$. La tangente a pour équation

$$y = -6(x - 1) + 13 = -6x + 19$$

b) La tangente est horizontale quand $f'(x) = 0$: $2x - 8 = 0$ donne $x = 4$, et $f(4) = 16 - 32 + 20 = 4$. C'est le point $(4\,;4)$, où la tangente a pour équation $y = 4$.

c) La dérivée est négative avant 4 et positive après : f décroît puis croît, et atteint son minimum 4 en $x = 4$.

C'est cohérent avec a) : 1 est avant 4, et la pente -6 y est bien négative.

Contrôle : $f(3) = f(5) = 5$, plus grand que 4. Réponses : $y = -6x + 19$; $(4\,;4)$; minimum 4 en $x = 4$.

Réponse. a) $y = -6x + 19$ · b) $(4\,;4)$ · c) minimum 4 en $x = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).