

Plaquette 2 - Nombre dérivé et tangentes

Dérivation et variations — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le taux de variation. Entre a et $a + h$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est le coefficient directeur de la **sécante** joignant les deux points.

Le nombre dérivé. $f'(a)$ est la valeur vers laquelle tend ce taux quand h devient très petit. C'est le coefficient directeur de la **tangente** au point d'abscisse a .

L'équation de la tangente.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Élément	Rôle
$f(a)$	l' ordonnée du point de contact
$f'(a)$	la pente de la tangente
a	l'abscisse du point de contact

Lecture graphique. Une tangente passant par deux points $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ a pour pente :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Les trois signes.

Signe de $f'(a)$	Tangente	Allure de la courbe
positif	montante	f croît au voisinage de a
négatif	descendante	f décroît au voisinage de a
nul	horizontale	souvent un extremum

Dérivées utiles ici. $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(ax + b)' = a$.

⚠ Ne pas confondre $f(a)$, qui est une **hauteur**, et $f'(a)$, qui est une **pente**.

Correction de l'exercice 1 - Taux de variation entre deux points

a) **Image de 1** : 1 ✓

— **Image de 4** : 16 ✓

— **Taux** : $\frac{16-1}{4-1}$ ✓

— **Numérateur** : 15 ✓

— **Dénominateur** : 3 ✓

— **Résultat** :

5

b) **Image de 2** : 4 ✓

- **Image de 5** : 25 ✓
- **Taux** : $\frac{25-4}{5-2}$ ✓
- **Numérateur** : 21 ✓
- **Résultat** :

7

c) **Signification** : c'est le coefficient directeur de la sécante ✓

- **Autre lecture** : la variation moyenne de f par unité ✓
- **Comparaison** : $7 > 5$ ✓
- **Interprétation** : la courbe monte plus vite plus loin ✓
- **Cohérence** : c'est une parabole, sa pente augmente ✓
- **Contrôle entre 0 et 3** : $\frac{9-0}{3} = 3$ ✓
- **Confirmation** : le taux croît avec l'intervalle choisi ✓
- **Vocabulaire** : ce n'est pas encore un nombre dérivé ✓
- **Différence** : le nombre dérivé porte sur **un seul** point ✓

Réponse. a) 5 · b) 7 · c) ce sont les pentes des sécantes, et elles augmentent.

Correction de l'exercice 2 - Du taux au nombre dérivé

a) **Identité remarquable** : $(3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2$ ✓

— **Expression** :

$$f(3 + h) = 9 + 6h + h^2$$

b) **Numérateur** : $f(3 + h) - f(3)$ ✓

- **Valeur de $f(3)$** : 9 ✓
- **Différence** : $6h + h^2$ ✓
- **Factorisation** : $h(6 + h)$ ✓
- **Quotient par h** : on simplifie ✓
- **Taux** :

$$6 + h$$

c) **On fait tendre h vers 0** ✓

— **Limite** :

$$f(3) = 6$$

- **Contrôle par la formule** : $f(x) = 2x$ ✓
- **En $x = 3$** : 6 ✓
- **Concordance** ✓
- **Contrôle numérique pour $h = 0,1$** : 6,1 ✓
- **Pour $h = 0,01$** : 6,01 ✓
- **Pour $h = 0,001$** : 6,001 ✓
- **Constat** : le taux se rapproche de 6 ✓
- **Interprétation** : la tangente en $x = 3$ a pour pente 6 ✓

Réponse. a) $9 + 6h + h^2$ · b) $6 + h$ · c) $f(3) = 6$.

Correction de l'exercice 3 - Le cas d'une fonction affine

a) **Image en $a + h$** : $5(a + h) - 2$ ✓

— **Développement** : $5a + 5h - 2$ ✓

— **Image en a** : $5a - 2$ ✓

— **Différence** : $5h$ ✓

— **Quotient par h** :

$$5$$

— **Observation** : le taux ne dépend ni de a ni de h ✓

b) **Limite quand h tend vers 0** ✓

— **Résultat** :

$$f(a) = 5$$

— **Pour toute valeur de a** ✓

c) **Interprétation** : la pente est constante ✓

— **Nature de la courbe** : une droite ✓

— **Tangente à une droite** : la droite elle-même ✓

— **Coefficient directeur** : 5 ✓

— **Règle générale** : $(ax + b)' = a$ ✓

— **Exemple** : $(-3x + 7)' = -3$ ✓

— **Exemple** : $(0,5x)' = 0,5$ ✓

— **Cas de la constante** : $(k)' = 0$ ✓

— **Interprétation** : une droite horizontale a une pente nulle ✓

Réponse. a) 5 · b) $f(a) = 5$ · c) la tangente à une droite est la droite elle-même.

Correction de l'exercice 4 - Lire un nombre dérivé

a) **Pente de la tangente** : $\frac{7-1}{2-0}$ ✓

— **Numérateur** : 6 ✓

— **Dénominateur** : 2 ✓

— **Résultat** :

$$f'(2) = 3$$

b) **Le point de contact a pour abscisse 2** ✓

— **Il appartient à la tangente** ✓

— **Point correspondant** : (2 ; 7) ✓

— **Résultat** :

$$f(2) = 7$$

c) **Formule** : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ ✓

— **Substitution** : $y = 3(x - 2) + 7$ ✓

— **Développement** : $3x - 6 + 7$ ✓

— **Équation** :

$$y = 3x + 1$$

— **Contrôle en $x = 0$** : $y = 1$ ✓

— **Concordance avec le point (0 ; 1)** ✓

- **Contrôle en $x = 2$:** $y = 7$ ✓
- **Concordance avec le point de contact** ✓
- **Signe de la pente :** positif ✓
- **Conclusion :** f est croissante au voisinage de 2 ✓

Réponse. a) $f(2) = 3$ · b) $f(2) = 7$ · c) $y = 3x + 1$.

Correction de l'exercice 5 - Signe du nombre dérivé

- **Tangente descendante en -1** ✓
- **Signe :** $f(-1) < 0$ ✓
- **Variation locale :** f décroît ✓
- **Tangente horizontale en 2** ✓
- **Valeur :**

$$f(2) = 0$$
- **Interprétation :** la pente est nulle ✓
- **Hypothèse :** il y a sans doute un extremum ✓
- **Tangente montante en 5** ✓
- **Signe :** $f(5) > 0$ ✓
- **Variation locale :** f croît ✓
- **Allure globale :** décroissante puis croissante ✓
- **Nature de l'extremum en 2 :** un **minimum** ✓
- **Justification :** la dérivée passe du négatif au positif ✓
- **Réserve :** cela suppose un changement de signe effectif ✓
- **Contre-exemple connu :** $f(x) = x^3$ en 0 ✓
- **Chez elle :** $f(0) = 0$ mais pas d'extremum ✓
- **Raison :** la dérivée $3x^2$ reste positive ✓
- **Leçon :** une tangente horizontale ne suffit pas ✓

Réponse. $f(-1) < 0$, $f(2) = 0$, $f(5) > 0$: f décroît puis croît, avec un minimum en 2.

Correction de l'exercice 6 - Équation de tangente

- **Calcul de $f(3)$:** $9 - 12 + 7$ ✓
- **Valeur :**

$$f(3) = 4$$
- **Dérivée :** $f(x) = 2x - 4$ ✓
- **Calcul de $f'(3)$:** $6 - 4$ ✓
- **Valeur :**

$$f'(3) = 2$$
- **Formule :** $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$ ✓
- **Substitution :** $y = 2(x - 3) + 4$ ✓
- **Développement :** $2x - 6 + 4$ ✓
- **Équation :**

$$y = 2x - 2$$
- **Contrôle du point de contact :** en $x = 3$, $y = 4$ ✓
- **Concordance avec $f(3)$** ✓
- **Contrôle de la pente :** coefficient directeur 2 ✓

- **Concordance avec $f(3)$** ✓
- **Position en $x = 4$, courbe** : $16 - 16 + 7 = 7$ ✓
- **Tangente en $x = 4$** : 6 ✓
- **Constat** : la courbe est au-dessus ✓
- **Explication** : la parabole est tournée vers le haut ✓

Réponse. $y = 2x - 2$.

Correction de l'exercice 7 - Une parabole descendante

- **Calcul de $f(1)$** : $-2 + 5 + 1$ ✓
 - **Valeur** :
- $$f(1) = 4$$

- **Dérivée** : $f'(x) = -4x + 5$ ✓
 - **Calcul de $f'(1)$** : $-4 + 5$ ✓
 - **Valeur** :
- $$f'(1) = 1$$

- **Formule** : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ✓
 - **Substitution** : $y = 1 \times (x - 1) + 4$ ✓
 - **Développement** : $x - 1 + 4$ ✓
 - **Équation** :
- $$y = x + 3$$

- **Contrôle en $x = 1$** : $y = 4$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Signe de la pente** : positif ✓
- **Interprétation** : f croît encore en $x = 1$ ✓
- **Sommet de la parabole** : $f'(x) = 0$ ✓
- **Résolution** : $-4x + 5 = 0$ ✓
- **Abscisse** : $x = 1,25$ ✓
- **Cohérence** : $1 < 1,25$, on est avant le sommet ✓
- **Donc** : la fonction est bien croissante en 1 ✓

Réponse. $y = x + 3$.

Correction de l'exercice 8 - Tangente à l'hyperbole

- **Calcul de $f(2)$** : $\frac{1}{2}$ ✓
 - **Valeur** :
- $$f(2) = 0,5$$

- **Dérivée de la fonction inverse** :
- $$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

- **Calcul de $f'(2)$** : $-\frac{1}{4}$ ✓
- **Valeur** : $-0,25$ ✓
- **Formule** : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ ✓
- **Substitution** : $y = -0,25(x - 2) + 0,5$ ✓

— **Développement** : $-0,25x + 0,5 + 0,5$ ✓

— **Équation** :

$$y = -0,25x + 1$$

— **Contrôle en** $x = 2$: $-0,5 + 1 = 0,5$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Signe de la pente** : négatif ✓

— **Interprétation** : la fonction inverse décroît ✓

— **Cohérence** : $-\frac{1}{x^2}$ est toujours négatif ✓

— **Conséquence** : toutes ses tangentes descendent ✓

— **Tangente en** $x = 1$: $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$ ✓

— **Équation** : $y = -x + 2$ ✓

— **Contrôle** : en $x = 1$, $y = 1$ ✓

Réponse. $y = -0,25x + 1$.

Correction de l'exercice 9 - Tangente horizontale

— **Condition** : $f'(x) = 0$ ✓

— **Dérivée** : $f'(x) = 2x - 6$ ✓

— **Équation** : $2x - 6 = 0$ ✓

— **Solution** :

$$x = 3$$

— **Ordonnée** : $f(3) = 9 - 18 + 11$ ✓

— **Valeur** :

$$f(3) = 2$$

— **Point de contact** : $(3; 2)$ ✓

— **Équation de la tangente** : $y = 0 \times (x - 3) + 2$ ✓

— **Simplification** :

$$y = 2$$

— **Nature** : une droite horizontale ✓

— **Signe de f' avant 3** : négatif ✓

— **Contrôle** : $f'(0) = -6$ ✓

— **Signe après 3** : positif ✓

— **Contrôle** : $f'(5) = 4$ ✓

— **Conclusion** : $x = 3$ donne un **minimum** ✓

— **Valeur du minimum** : 2 ✓

— **Contrôle** : $f(2) = 3$ et $f(4) = 3$ ✓

— **Confirmation** : 2 est bien la plus petite valeur ✓

Réponse. Au point $(3; 2)$, tangente d'équation $y = 2$.

Correction de l'exercice 10 - Tangente parallèle à une droite

— **Pente de la droite donnée** : 4 ✓

— **Condition de parallélisme** : $f'(x) = 4$ ✓

— **Dérivée** : $f'(x) = 2x - 2$ ✓

— **Équation** : $2x - 2 = 4$ ✓

— **Solution :**

$$x = 3$$

- **Ordonnée :** $f(3) = 9 - 6 \checkmark$
- **Valeur :** $3 \checkmark$
- **Point de contact :** $(3; 3) \checkmark$
- **Équation de la tangente :** $y = 4(x - 3) + 3 \checkmark$
- **Développement :** $4x - 12 + 3 \checkmark$
- **Équation :**

$$y = 4x - 9$$

- **Contrôle du parallélisme :** même coefficient directeur $\checkmark$
- **Contrôle de la distinction :** $-9 \neq 9 \checkmark$
- **Conclusion :** les deux droites sont parallèles et distinctes $\checkmark$
- **Contrôle en $x = 3$:** $12 - 9 = 3 \checkmark$
- **Concordance avec $f(3)$:** $\checkmark$
- **Tangente parallèle à l'axe des abscisses :** $f'(x) = 0 \checkmark$
- **Abscisse :** $x = 1 \checkmark$
- **Ordonnée :** $f(1) = -1 \checkmark$

Réponse. Au point $(3; 3)$, tangente d'équation $y = 4x - 9$.

Correction de l'exercice 11 - Remonter à $f(a)$ et $f'(a)$

- **La pente de la tangente est $f'(2)$:** $\checkmark$
- **Coefficient directeur lu :** $5 \checkmark$
- **Résultat :**

$$f'(2) = 5$$

- **Le point de contact est sur la tangente :** $\checkmark$
- **Abscisse :** $2 \checkmark$
- **Ordonnée :** $5 \times 2 - 3 \checkmark$
- **Calcul :** $10 - 3 \checkmark$
- **Résultat :**

$$f(2) = 7$$

- **Vérification par la formule :** $y = 5(x - 2) + 7 \checkmark$
- **Développement :** $5x - 10 + 7 \checkmark$
- **Simplification :** $5x - 3 \checkmark$
- **Concordance avec l'énoncé :** $\checkmark$
- **Interprétation de $f(2)$:** une hauteur $\checkmark$
- **Interprétation de $f'(2)$:** une pente $\checkmark$
- **Piège classique :** les intervertir $\checkmark$
- **Ici :** $f(2) = 7$, pas $5 \checkmark$
- **Et :** $f'(2) = 5$, pas $-3 \checkmark$
- **L'ordonnée à l'origine -3 ne s'interprète pas directement :** $\checkmark$

Réponse. $f(2) = 7$ et $f'(2) = 5$.

Correction de l'exercice 12 - Approximation par la tangente

- a) **Image :** $f(3) = 9 \checkmark$

- **Dérivée** : $f'(x) = 2x$ ✓
- **Nombre dérivé** : $f'(3) = 6$ ✓
- **Formule** : $y = 6(x - 3) + 9$ ✓
- **Équation** :

$$y = 6x - 9$$

b) **Substitution de $x = 3,02$** : $6 \times 3,02 - 9$ ✓

- **Produit** : 18,12 ✓
- **Différence** : $18,12 - 9$ ✓
- **Estimation** :

$$9,12$$

c) **Valeur exacte** : $3,02^2$ ✓

- **Calcul** : 9,1204 ✓
- **Écart** : 0,0004 ✓
- **Appréciation** : l'approximation est excellente ✓
- **Raison** : on reste très près du point de contact ✓
- **Estimation de $3,1^2$ par la tangente** : $6 \times 3,1 - 9 = 9,6$ ✓
- **Valeur exacte** : 9,61 ✓
- **Écart** : 0,01 ✓
- **Constat** : l'écart grandit quand on s'éloigne ✓
- **Position relative** : la tangente est toujours en dessous ✓
- **Explication** : la parabole est tournée vers le haut ✓

Réponse. a) $y = 6x - 9$ · b) 9,12 · c) exact 9,1204, écart 0,0004.

Correction de l'exercice 13 - Coût marginal et tangente

- a) **Dérivée** : $C'(x) = 4x + 30$ ✓
- **Substitution** : $4 \times 20 + 30$ ✓
 - **Produit** : 80 ✓
 - **Résultat** :

$$C'(20) = 110 \text{ €}$$

b) **Coût pour 21 unités** : $2 \times 441 + 30 \times 21 + 500$ ✓

- **Premier terme** : 882 ✓
- **Deuxième terme** : 630 ✓
- **Somme** : 2012 € ✓
- **Coût pour 20 unités** : $800 + 600 + 500$ ✓
- **Somme** : 1900 € ✓
- **Différence** :

$$112 \text{ €}$$

c) **Comparaison** : 110 contre 112 ✓

- **Écart** : 2 € ✓
- **Appréciation** : très proche ✓
- **Interprétation** : le coût marginal approche le coût de l'unité suivante ✓
- **Justification** : c'est l'approximation par la tangente ✓
- **Coût marginal en $x = 50$** : $200 + 30 = 230$ € ✓

- **Observation** : il augmente avec la production ✓
- **Explication** : la dérivée $4x + 30$ est croissante ✓
- **Conséquence économique** : les rendements sont décroissants ✓

Réponse. a) 110 € · b) 112 € · c) le coût marginal est une très bonne approximation.

Correction de l'exercice 14 - Deux tangentes parallèles

a) **Dérivée** : $f(x) = 3x^2$ ✓

— **En** $x = 1$: 3×1 ✓

— **Valeur** : $f(1) = 3$ ✓

— **En** $x = -1$: 3×1 ✓

— **Valeur** :

$$f(-1) = 3$$

— **Raison** : le carré efface le signe ✓

b) **Les deux pentes sont égales** ✓

— **Conclusion** :

les tangentes sont parallèles

— **Sont-elles confondues ?** Il faut comparer les points ✓

c) **Point en** $x = 1$: $f(1) = 1$ ✓

— **Équation** : $y = 3(x - 1) + 1$ ✓

— **Développement** :

$$y = 3x - 2$$

— **Point en** $x = -1$: $f(-1) = -1$ ✓

— **Équation** : $y = 3(x + 1) - 1$ ✓

— **Développement** :

$$y = 3x + 2$$

— **Comparaison des ordonnées à l'origine** : $-2 \neq 2$ ✓

— **Conclusion** : parallèles et **distinctes** ✓

— **Tangente horizontale** : $3x^2 = 0$ ✓

— **Abscisse** : $x = 0$ ✓

— **Remarque** : ce n'est pourtant pas un extremum ✓

Réponse. a) $f(1) = f(-1) = 3$ · b) elles sont parallèles · c) $y = 3x - 2$ et $y = 3x + 2$.

Correction de l'exercice 15 - Repérer une erreur

— **Première erreur** : confondre $f(3)$ et $f'(3)$ ✓

— **Ce que vaut** $f(3)$: $9 - 12 + 7 = 4$ ✓

— **Ce que vaut** $f'(3)$: il faut dériver d'abord ✓

— **Dérivée** : $f'(x) = 2x - 4$ ✓

— **Valeur** :

$$f'(3) = 2$$

— **Différence des deux nombres** : 4 est une hauteur, 2 une pente ✓

— **Seconde erreur** : l'équation $y = 4x$ ✓

— **Défaut** : elle ne passe pas par le point de contact ✓

- **Contrôle** : en $x = 3$, elle donne 12, pas 4 ✓
- **Troisième erreur** : la formule utilisée ✓
- **Formule correcte** : $y = f(a)(x - a) + f(a)$ ✓
- **Substitution** : $y = 2(x - 3) + 4$ ✓
- **Équation correcte** :

$$y = 2x - 2$$

- **Contrôle du point** : en $x = 3$, $y = 4$ ✓
- **Contrôle de la pente** : 2 ✓
- **Concordance complète** ✓
- **Méthode fiable en trois temps** ✓
- **Étape 1** : calculer $f(a)$ ✓
- **Étape 2** : dériver puis calculer $f(a)$ ✓
- **Étape 3** : appliquer la formule et développer ✓

Réponse. $f(3) = 4$ mais $f'(3) = 2$: la tangente est $y = 2x - 2$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : deux tangentes d'une parabole

a) **Image** : $f(1) = 1 - 8 + 20$ ✓

- **Valeur** : 13 ✓
- **Dérivée** : $f'(x) = 2x - 8$ ✓
- **Nombre dérivé** : $f'(1) = 2 - 8$ ✓
- **Valeur** : -6 ✓
- **Formule** : $y = -6(x - 1) + 13$ ✓
- **Développement** : $-6x + 6 + 13$ ✓
- **Équation** :

$$y = -6x + 19$$

b) **Condition** : $f'(x) = 0$ ✓

- **Équation** : $2x - 8 = 0$ ✓
- **Solution** :

$$x = 4$$

- **Ordonnée** : $16 - 32 + 20$ ✓
- **Valeur** : 4 ✓
- **Point** : (4; 4) ✓
- **Tangente** : $y = 4$ ✓

c) **Signe de f' avant 4** : négatif ✓

- **Signe après 4** : positif ✓
- **Conclusion** :

minimum 4 atteint en $x = 4$

- **Contrôle par la forme canonique** : $(x - 4)^2 + 4$ ✓
- **Développement de contrôle** : $x^2 - 8x + 16 + 4$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Cohérence de a)** : $1 < 4$, la pente -6 est bien négative ✓
- **Contrôle** : $f(3) = 5$ et $f(5) = 5$ ✓
- **Confirmation** : 4 est bien la plus petite valeur ✓

Réponse. a) $y = -6x + 19$ · b) $(4; 4)$ · c) minimum 4 en $x = 4$.