

Plaquette 1 - Nombre dérivé, tangente et sens de variation

Dérivation et variations — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- **Taux de variation** de f entre a et $a + h$:

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

- Le **nombre dérivé** $f'(a)$ est la limite de ce taux quand h devient très petit. Géométriquement, c'est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .

- **Équation de la tangente** au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Dérivées à connaître : $(k)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

- Opérations utilisées en STMG : $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = k \times u'$.

- **Lien signe / variations** : si $f' > 0$ sur un intervalle, f y est **croissante** ; si $f' < 0$, f y est **décroissante** ; si f' s'annule en changeant de signe, il y a un **extremum**.

- Une tangente **horizontale** correspond à $f'(a) = 0$.

- En gestion : coût marginal $\approx$ dérivée du coût total ; le bénéfice est maximal là où sa dérivée s'annule en changeant de signe.

Correction de l'exercice 1 - Taux de variation

On applique la formule $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ avec $a = 2$.

$$\text{— Pour } h = 0,1 : \frac{2,1^2 - 2^2}{0,1} = \frac{4,41 - 4}{0,1} = \frac{0,41}{0,1} = 4,1.$$

$$\text{— Pour } h = 0,01 : \frac{2,01^2 - 4}{0,01} = \frac{4,0401 - 4}{0,01} = 4,01.$$

- Les taux se rapprochent de 4 : on conjecture $f'(2) = 4$.

- Confirmation par la formule : $f'(x) = 2x$, donc $f'(2) = 4$.

Réponse. 4,1 puis 4,01 : on conjecture $f'(2) = 4$.

Correction de l'exercice 2 - Lecture graphique d'un nombre dérivé

a) $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente. On le calcule avec les deux points :

$$f'(2) = \frac{11 - 5}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

b) On applique la formule du cours avec $a = 2$, $f'(2) = 3$ et $f(2) = 5$:

$$y = 3(x - 2) + 5 = 3x - 1$$

- Contrôle : pour $x = 4$, $3 \times 4 - 1 = 11$: la droite passe bien par B .

Réponse. a) $f'(2) = 3$ · b) $y = 3x - 1$.

Correction de l'exercice 3 - Dériver un polynôme

On dérive terme à terme, avec $(x^n)' = nx^{n-1}$ et $(ku)' = ku'$.

- a) $f(x) = 4 \times 2x - 7 + 0 = 8x - 7$.
- b) $g'(x) = 3x^2 - 6 \times 2x + 0 = 3x^2 - 12x$.
- c) $h'(x) = 0,5 \times 3x^2 - 2 = 1,5x^2 - 2$.

Piège. La dérivée d'une constante est nulle : le +3 et le +5 disparaissent.

Réponse. a) $8x - 7$ · b) $3x^2 - 12x$ · c) $1,5x^2 - 2$.

Correction de l'exercice 4 - Équation de tangente

- Valeur : $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$.
- Dérivée : $f'(x) = 2x - 4$, donc $f'(3) = 2$.
- Formule du cours :

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3) = 2(x - 3) - 2 = 2x - 8$$

- Contrôle : pour $x = 3$, la tangente donne $y = -2 = f(3)$. Elle passe bien par le point de contact.

Réponse. $y = 2x - 8$.

Correction de l'exercice 5 - Tangente horizontale

Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire $f'(x) = 0$.

- $f'(x) = 4x - 8$.
- $4x - 8 = 0$ donne $x = 2$.
- Ordonnée : $f(2) = 8 - 16 + 3 = -5$.
- La tangente est horizontale au point $(2; -5)$; c'est le **sommet** de la parabole, et donc le minimum de f (car $a > 0$).

Réponse. Au point $(2; -5)$.

Correction de l'exercice 6 - Signe de la dérivée et variations

- Dérivée : $f'(x) = 2x - 6$.
- $f'(x) = 0$ pour $x = 3$; $f'(x) < 0$ pour $x < 3$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 3$.

Intervalle	$] - \infty ; 3]$	$[3 ; +\infty[$
Signe de $f'(x)$	-	+
Variations de f	décroissante	croissante

- Minimum : $f(3) = 9 - 18 + 8 = -1$, atteint en $x = 3$.
- Contrôle : $f(0) = 8$ et $f(6) = 36 - 36 + 8 = 8$: valeurs symétriques autour de $x = 3$. Cohérent.

Réponse. f décroît sur $] - \infty ; 3]$, croît sur $[3 ; +\infty[$; minimum -1 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 7 - Fonction de degré 3

- Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$.
- Le trinôme $3x^2 - 12$ a pour racines -2 et 2 , avec $a = 3 > 0$: il est positif à l'extérieur de $[-2 ; 2]$, négatif entre -2 et 2 .

Intervalle	$[-4; -2]$	$[-2; 2]$	$[2; 4]$
Signe de $f'(x)$	+	-	+
Variations de f	croissante	décroissante	croissante

- $f(-2) = -8 + 24 = 16$: **maximum local**.
- $f(2) = 8 - 24 = -16$: **minimum local**.
- Sur l'intervalle étudié, $f(-4) = -64 + 48 = -16$ et $f(4) = 64 - 48 = 16$: le maximum global vaut 16 et le minimum global -16, chacun atteint deux fois.

Réponse. Maximum local 16 en $x = -2$, minimum local -16 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 8 - Dérivée et fonction inverse

a) Formule du cours : $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

b) Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$: la fonction est **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$.

c) $f'(2) = -\frac{1}{4} = -0,25$.

— La tangente en ce point a donc pour coefficient directeur -0,25 : elle descend. Son équation est $y = -0,25(x - 2) + 0,5 = -0,25x + 1$.

Réponse. a) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ · b) décroissante · c) -0,25.

Correction de l'exercice 9 - Problème : coût marginal

a) On dérive terme à terme :

$$C'(q) = 0,3q^2 - 12q + 150$$

b) $C'(10) = 0,3 \times 100 - 120 + 150 = 30 + 30 = 60$.

— Interprétation : produire le 11^e objet coûte environ 60 € de plus. C'est le sens économique de la dérivée.

c) C' est une fonction du second degré avec $a = 0,3 > 0$: elle admet un minimum au sommet.

— $\alpha = \frac{12}{2 \times 0,3} = \frac{12}{0,6} = 20$.

— $C'(20) = 0,3 \times 400 - 240 + 150 = 120 - 90 = 30$.

— Le coût marginal est donc minimal pour $q = 20$ objets, où il vaut 30 € par objet supplémentaire.

Réponse. a) $C'(q) = 0,3q^2 - 12q + 150$ · b) 60 € (coût du 11^e objet) · c) minimal en $q = 20$, à 30 €.

Correction de l'exercice 10 - Problème : bénéfice maximal

— Dérivée : $B'(q) = -3q^2 + 27 = -3(q^2 - 9) = -3(q - 3)(q + 3)$.

— Sur $[0; 6]$, le facteur $q + 3$ est positif, donc B' a le signe de $-(q - 3)$: positive pour $q < 3$, négative pour $q > 3$.

— Le bénéfice croît puis décroît : il est **maximal en** $q = 3$.

— $B(3) = -27 + 81 + 10 = 64$.

— Le bénéfice maximal vaut 64 milliers d'euros, soit 64 000 €, pour 300 articles vendus.

— Contrôle : $B(2) = -8 + 54 + 10 = 56$ et $B(4) = -64 + 108 + 10 = 54$, tous deux inférieurs à 64.

Réponse. $q = 3$ (soit 300 articles), bénéfice maximal 64 000 €.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : exploiter un tableau de variations

a) Le signe de f' donne directement les variations :

Intervalle	$[0; 2]$	$[2; 7]$	$[7; 10]$
Variations de f	de 3 à 9	de 9 à 1	de 1 à 6

b) On compare les valeurs aux extrémités des branches : 3, 9, 1, 6.

— **Maximum** : 9, atteint en $x = 2$. **Minimum** : 1, atteint en $x = 7$.

c) On compte les branches qui traversent le niveau 5 :

— sur $[0; 2]$, f monte de 3 à 9 : elle traverse 5 **une** fois ;

— sur $[2; 7]$, f descend de 9 à 1 : une fois ;

— sur $[7; 10]$, f monte de 1 à 6 : une fois.

— L'équation $f(x) = 5$ a donc **trois** solutions.

Réponse. b) max 9 en $x = 2$, min 1 en $x = 7$ · c) trois solutions.