Plaquette 1 – Nombre dérivé, tangente et sens de variation

Dérivation et variations — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— **Taux de variation** de f entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

— Le **nombre dérivé** $f'(a)$ est la limite de ce taux quand h devient très petit. Géométriquement, c'est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a.

— **Équation de la tangente** au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

— Dérivées à connaître : $(k)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. Elles suffisent pour dériver tout polynôme de degré au plus 3.

— Opérations utilisées en STMG : $(u+v)' = u' + v'$ et $(ku)' = k \times u'$.

— **Lien signe / variations** : si $f' > 0$ sur un intervalle, f y est **croissante** ; si $f' < 0$, f y est **décroissante** ; si f' s'annule en changeant de signe, il y a un **extremum**.

— Une tangente **horizontale** correspond à $f'(a) = 0$.

— En gestion : coût marginal ≈ dérivée du coût total ; le bénéfice est maximal là où sa dérivée s'annule en changeant de signe.

Correction de l'exercice 1 – Taux de variation

On applique la formule $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $a = 2$.

— Pour $h = 0{,}1$: $\dfrac{2{,}1^2 - 2^2}{0{,}1} = \dfrac{4{,}41 - 4}{0{,}1} = \dfrac{0{,}41}{0{,}1} = 4{,}1$.

— Pour $h = 0{,}01$: $\dfrac{2{,}01^2 - 4}{0{,}01} = \dfrac{4{,}040\,1 - 4}{0{,}01} = 4{,}01$.

— Les taux se rapprochent de 4 : on conjecture $f'(2) = 4$.

— Confirmation par la formule : $f'(x) = 2x$, donc $f'(2) = 4$.

Réponse. 4,1 puis 4,01 : on conjecture $f'(2) = 4$.

Correction de l'exercice 2 – Un taux de variation négatif

a) On applique la formule du taux de variation entre a et $a+h$, avec $a = 1$ et $f(1) = 3 - 1 = 2$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

— Pour $h = 0{,}1$: $f(1{,}1) = 3 - 1{,}21 = 1{,}79$, donc le taux vaut $\dfrac{1{,}79 - 2}{0{,}1} = \dfrac{-0{,}21}{0{,}1} = -2{,}1$.

— Pour $h = 0{,}01$: $f(1{,}01) = 3 - 1{,}020\,1 = 1{,}979\,9$, donc le taux vaut $\dfrac{-0{,}020\,1}{0{,}01} = -2{,}01$.

b) Les taux se rapprochent de -2 : on conjecture $f'(1) = -2$. Avec les dérivées du cours,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f'(x) = 0 - 2x = -2x$, donc $f'(1) = -2$.

c) Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente. Il est **négatif** : la tangente descend, et la fonction est décroissante au voisinage de $x = 1$.

Réponse. a) $-2{,}1$ puis $-2{,}01$ · b) $f'(1) = -2$ · c) la tangente descend.

Correction de l'exercice 3 – Lecture graphique d'un nombre dérivé

a) $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente. On le calcule avec les deux points :

$$f'(2) = \frac{11 - 5}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

b) On applique la formule du cours avec $a = 2$, $f(2) = 5$ et $f'(2) = 3$:

$$y = 3(x - 2) + 5 = 3x - 1$$

— Contrôle : pour $x = 4$, $3 \times 4 - 1 = 11$: la droite passe bien par B.

Réponse. a) $f'(2) = 3$ · b) $y = 3x - 1$.

Correction de l'exercice 4 – Lire nombres dérivés et tangentes

a) Le point A a pour abscisse 2 et on lit son ordonnée : $f(2) = 1$. La tangente en A est horizontale, son coefficient directeur est nul :

$$f'(2) = 0$$

b) On lit $f(4) = 3$. Le nombre dérivé $f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente en B. Elle passe par $B(4\,;3)$ et par $(3\,;1)$; on divise la variation des ordonnées par celle des abscisses :

$$f'(4) = \frac{3 - 1}{4 - 3} = 2$$

c) On applique la formule de la tangente avec $a = 4$, $f(4) = 3$ et $f'(4) = 2$:

$$y = f'(4)(x - 4) + f(4) = 2(x - 4) + 3 = 2x - 5$$

— Contrôle : pour $x = 3$, $2 \times 3 - 5 = 1$: la droite passe bien par $(3\,;1)$.

Réponse. a) $f(2) = 1$, $f'(2) = 0$ · b) $f(4) = 3$, $f'(4) = 2$ · c) $y = 2x - 5$.

Correction de l'exercice 5 – Dériver un polynôme

On dérive terme à terme, avec $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x)' = 1$ et $(ku)' = k \times u'$.

a) $f'(x) = 4 \times 2x - 7 + 0 = 8x - 7$.
b) $g'(x) = 3x^2 - 6 \times 2x + 0 = 3x^2 - 12x$.
c) $h'(x) = 0{,}5 \times 3x^2 - 2 = 1{,}5x^2 - 2$.

Piège. La dérivée d'une constante est nulle : le +3 et le +5 disparaissent.

Réponse. a) $8x - 7$ · b) $3x^2 - 12x$ · c) $1{,}5x^2 - 2$.

Correction de l'exercice 6 – Équation de tangente

— Valeur : $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$.
— Dérivée : $f'(x) = 2x - 4$, donc $f'(3) = 2$.
— Formule du cours :

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3) = 2(x - 3) - 2 = 2x - 8$$

— Contrôle : pour $x = 3$, la tangente donne $y = -2 = f(3)$. Elle passe bien par le point de contact.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $y = 2x - 8$.

Correction de l'exercice 7 – Tangente parallèle à une droite

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur. On cherche donc le point d'abscisse a où le nombre dérivé vaut 5 :

$$f'(a) = 5$$

— Dérivée : $f'(x) = 2x + 1$.
— Équation : $2a + 1 = 5$, donc $2a = 4$ et $a = 2$.
— Point de contact : $f(2) = 4 + 2 = 6$, c'est le point $(2\,;6)$.
— Tangente, avec la formule du cours :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 5(x - 2) + 6 = 5x - 4$$

— Contrôle : pour $x = 2$, $5 \times 2 - 4 = 6 = f(2)$. La tangente a bien pour coefficient directeur 5, comme la droite donnée, mais une ordonnée à l'origine différente (-4 et non 1) : elles sont parallèles et distinctes.

Réponse. Au point $(2\,;6)$; tangente $y = 5x - 4$.

Correction de l'exercice 8 – Tangente horizontale

Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire $f'(x) = 0$.

— $f'(x) = 4x - 8$.
— $4x - 8 = 0$ donne $x = 2$.
— Ordonnée : $f(2) = 8 - 16 + 3 = -5$.
— La tangente est horizontale au point $(2\,;-5)$; c'est le **sommet** de la parabole, et donc le minimum de f (car $a > 0$).

Réponse. Au point $(2\,;-5)$.

Correction de l'exercice 9 – Signe de la dérivée et variations

— Dérivée : $f'(x) = 2x - 6$.
— $f'(x) = 0$ pour $x = 3$; $f'(x) < 0$ pour $x < 3$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 3$.

Intervalle	$]-\infty\,;3]$	$[3\,;+\infty[$
Signe de $f'(x)$	$-$	$+$
Variations de f	décroissante	croissante

— Minimum : $f(3) = 9 - 18 + 8 = -1$, atteint en $x = 3$.
— Contrôle : $f(0) = 8$ et $f(6) = 36 - 36 + 8 = 8$: valeurs symétriques autour de $x = 3$. Cohérent.

Réponse. f décroît sur $]-\infty\,;3]$, croît sur $[3\,;+\infty[$; minimum -1 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 10 – Fonction de degré 3

— Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$.
— Le trinôme $3x^2 - 12$ a pour racines -2 et 2, avec $a = 3 > 0$: il est positif à l'extérieur de $[-2\,;2]$, négatif entre -2 et 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Intervalle	$[-4\,;-2]$	$[-2\,;2]$	$[2\,;4]$
Signe de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Variations de f	croissante	décroissante	croissante

— $f(-2) = -8 + 24 = 16$: **maximum local**.
— $f(2) = 8 - 24 = -16$: **minimum local**.
— Sur l'intervalle étudié, $f(-4) = -64 + 48 = -16$ et $f(4) = 64 - 48 = 16$: le maximum global vaut 16 et le minimum global -16, chacun atteint deux fois.

Réponse. Maximum local 16 en $x = -2$, minimum local -16 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 11 – Vitesse moyenne et vitesse instantanée

a) La vitesse moyenne entre deux instants est le **taux de variation** de la distance :

$$v_{\text{moy}} = \frac{d(6) - d(4)}{6 - 4}$$

— $d(6) = 0{,}5 \times 36 = 18$ m et $d(4) = 0{,}5 \times 16 = 8$ m.
— $v_{\text{moy}} = \dfrac{18 - 8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ m/s.

b) La vitesse instantanée est le **nombre dérivé** de la distance. On dérive avec $(x^2)' = 2x$ et $(ku)' = k \times u'$:

$$d'(t) = 0{,}5 \times 2t = t$$

— $d'(5) = 5$ m/s.
— En km/h : $5 \times 3{,}6 = 18$ km/h (une seconde dure $\dfrac{1}{3\,600}$ h et un mètre vaut $\dfrac{1}{1\,000}$ km).

c) Même formule entre 2 et 8 : $d(8) = 32$ m et $d(2) = 2$ m, donc $v_{\text{moy}} = \dfrac{32 - 2}{8 - 2} = \dfrac{30}{6} = 5$ m/s.

On retrouve 5 m/s : pour cette distance du second degré, la vitesse moyenne sur un intervalle est égale à la vitesse instantanée en son **milieu** ($t = 5$ dans les deux cas). Le taux de variation mesure une vitesse moyenne, le nombre dérivé une vitesse instantanée.

Réponse. a) 5 m/s · b) $d'(t) = t$, $d'(5) = 5$ m/s, soit 18 km/h · c) 5 m/s, la vitesse instantanée au milieu de l'intervalle.

Correction de l'exercice 12 – Le nombre dérivé comme rythme d'évolution

a) On dérive terme à terme ; la constante 200 disparaît :

$$N'(t) = 30 - 2t$$

— $N'(5) = 30 - 10 = 20$.

b) Le nombre dérivé mesure le **rythme instantané** d'évolution : au bout de 5 mois, la plateforme gagne environ 20 milliers d'abonnés par mois, soit 20 000 abonnés par mois.

c) $N(6) = 200 + 180 - 36 = 344$ et $N(5) = 200 + 150 - 25 = 325$, donc :

$$N(6) - N(5) = 344 - 325 = 19$$

— Le gain réel du sixième mois, 19 000 abonnés, est proche de $N'(5) = 20$: le nombre dérivé donne une bonne approximation de la variation sur une unité.

d) $N'(t) = 30 - 2t$ est positif tant que $t < 15$ et s'annule en $t = 15$. Le nombre d'abonnés augmente donc pendant les 15 mois et cesse d'augmenter au bout de 15 mois, où il atteint son maximum : $N(15) = 200 + 450 - 225 = 425$ milliers.

Réponse. a) $N'(t) = 30 - 2t$, $N'(5) = 20$ · b) environ 20 000 abonnés gagnés par mois · c)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

19, proche de 20 · d) au bout de 15 mois (425 000 abonnés).

Correction de l’exercice 13 – Problème : coût marginal

a) On dérive terme à terme avec $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$ et $(ku)' = k \times u'$:

$$C'(q) = 0{,}3q^2 - 12q + 150$$

b) $C'(10) = 0{,}3 \times 100 - 120 + 150 = 30 - 120 + 150 = 60$.

— Interprétation : produire le 11^{e} objet coûte environ 60 € de plus. C’est le sens économique du nombre dérivé.

c) C' est un polynôme de degré 2 de coefficient $0{,}3 > 0$: sa courbe est une parabole tournée vers le haut, dont le minimum est atteint sur l’**axe de symétrie**. Pour trouver cet axe sans formule, on cherche les deux productions qui donnent la même valeur que $q = 0$, c’est-à-dire 150 :

$$0{,}3q^2 - 12q + 150 = 150 \Leftrightarrow 0{,}3q^2 - 12q = 0 \Leftrightarrow q(0{,}3q - 12) = 0$$

— Les solutions sont $q = 0$ et $q = \dfrac{12}{0{,}3} = 40$.

— Par symétrie, l’axe passe au milieu : $q = \dfrac{0 + 40}{2} = 20$.

— $C'(20) = 0{,}3 \times 400 - 240 + 150 = 120 - 240 + 150 = 30$.

— Le coût marginal est minimal pour $q = 20$ objets, où il vaut 30 € par objet supplémentaire.

Réponse. a) $C'(q) = 0{,}3q^2 - 12q + 150$ · b) 60 € (coût du 11^{e} objet) · c) minimal en $q = 20$, à 30 €.

Correction de l’exercice 14 – Problème : bénéfice maximal

— Dérivée : $B'(q) = -3q^2 + 27 = -3(q^2 - 9) = -3(q - 3)(q + 3)$.

— Sur $[0\,;6]$, le facteur $q + 3$ est positif, donc B' a le signe de $-(q - 3)$: positive pour $q < 3$, négative pour $q > 3$.

— Le bénéfice croît puis décroît : il est **maximal en** $q = 3$.

— $B(3) = -27 + 81 + 10 = 64$.

— Le bénéfice maximal vaut 64 milliers d’euros, soit 64 000 €, pour 300 articles vendus.

— Contrôle : $B(2) = -8 + 54 + 10 = 56$ et $B(4) = -64 + 108 + 10 = 54$, tous deux inférieurs à 64.

Réponse. $q = 3$ (soit 300 articles), bénéfice maximal 64 000 €.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : exploiter un tableau de variations

a) Le signe de f' donne directement les variations :

Intervalle	$[0\,;2]$	$[2\,;7]$	$[7\,;10]$
Variations de f	de 3 à 9	de 9 à 1	de 1 à 6

b) On compare les valeurs aux extrémités des branches : 3, 9, 1, 6.

— **Maximum** : 9, atteint en $x = 2$. **Minimum** : 1, atteint en $x = 7$.

c) On compte les branches qui traversent le niveau 5 :

— sur $[0\,;2]$, f monte de 3 à 9 : elle traverse 5 **une** fois ;

— sur $[2\,;7]$, f descend de 9 à 1 : une fois ;

— sur $[7\,;10]$, f monte de 1 à 6 : une fois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— L’équation $f(x) = 5$ a donc **trois** solutions.

Réponse. b) max 9 en $x = 2$, min 1 en $x = 7$ · c) trois solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).