Plaquette 5 – Optimiser une production

Dérivation et variations — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le vocabulaire économique.

Grandeur	Formule
recette	$R(x) = p \times x$
bénéfice	$B(x) = R(x) - C(x)$
coût marginal	$C'(x)$
seuil de rentabilité	la plus petite x telle que $B(x) \geq 0$

La méthode d'optimisation.

Étape	Ce qu'on fait
1	écrire la fonction à optimiser
2	la dériver
3	résoudre l'équation dérivée = 0
4	étudier le **signe** de la dérivée
5	conclure et calculer la valeur optimale

Deux résultats utiles.

Le coût marginal approche le coût de l'unité suivante :

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$$

Si chaque unité est vendue au prix p, le bénéfice est $B(x) = px - C(x)$. Au bénéfice maximal, $B'(x) = p - C'(x) = 0$: le **coût marginal est égal au prix de vente**.

$$C'(x) = p$$

Le prix optimal. Si la demande est $q(p) = a - bp$, la recette est :

$$R(p) = p \times (a - bp) = ap - bp^2$$

⚠ Maximiser la **recette** n'est pas maximiser le **bénéfice** : le coût n'intervient pas dans la première.

⚠ Une solution négative ou non entière doit être discutée : on ne produit pas -3 articles.

Correction de l'exercice 1 – Maximiser une recette

a) On développe : $R(x) = 200x - 2x^2 = -2x^2 + 200x$. Le coefficient de x^2 est négatif : la parabole est tournée vers le bas, la recette admet un maximum.

b) On dérive : $R'(x) = -4x + 200$, qui s'annule en $x = 50$. Elle est positive avant 50 et négative après : la recette croît puis décroît, elle est **maximale** pour 50 unités.

c) On calcule la recette correspondante :

$$R(50) = 50 \times (200 - 100) = 5000 \text{ €}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le facteur $200 - 2x$ s'interprète comme le prix unitaire : pour vendre 50 unités, il faut les vendre 100 € pièce. Vendre plus cher ferait chuter les ventes. **Contrôle** : $R(40) = R(60) = 4800$ € < 5000 €. Réponses : $-2x^2 + 200x$; 50 **unités** ; 5000 **€**.

Réponse. a) $-2x^2 + 200x$ · b) 50 unités · c) 5000 €.

Correction de l'exercice 2 – Maximiser un bénéfice

a) La recette vaut $80x$ et le bénéfice est la recette moins **tout** le coût :

$$B(x) = 80x - \left(x^2 + 20x + 500\right) = -x^2 + 60x - 500$$

b) On dérive : $B'(x) = -2x + 60$, qui s'annule en $x = 30$, positive avant et négative après. Le bénéfice est maximal pour 30 unités :

$$B(30) = -900 + 1800 - 500 = 400 \text{ €}$$

Contrôle : pour 30 unités, la recette vaut 2400 € et le coût $900 + 600 + 500 = 2000$ €, soit bien 400 € de bénéfice. Réponses : $B(x) = -x^2 + 60x - 500$; 30 **unités**, bénéfice 400 **€**.

Réponse. a) $B(x) = -x^2 + 60x - 500$ · b) 30 unités, bénéfice 400 €.

Correction de l'exercice 3 – Les seuils de rentabilité

a) $B(10) = -100 + 600 - 500 = 0$: 10 est racine. On développe la forme proposée :

$$-(x - 10)(x - 50) = -(x^2 - 60x + 500) = -x^2 + 60x - 500 = B(x)$$

b) Le facteur -1 est négatif ; $x - 10$ et $x - 50$ changent de signe en 10 et en 50.

x	$[0\,;10[$	$]10\,;50[$	$]50\,;60]$
$x - 10$	$-$	$+$	$+$
$x - 50$	$-$	$-$	$+$
$B(x)$	$-$	$+$	$-$

— $B(x) \geq 0$ pour $10 \leq x \leq 50$. Les **seuils de rentabilité** sont 10 et 50 unités : en dessous de 10 ou au-delà de 50, l'entreprise perd de l'argent.

c) On dérive : $B'(x) = -2x + 60$, qui s'annule pour $x = 30$, est positif avant et négatif après. Le bénéfice est maximal pour 30 unités :

$$B(30) = -900 + 1\,800 - 500 = 400$$

— Contrôle : 30 est bien au milieu des deux seuils 10 et 50, par symétrie de la parabole.

Réponse. b) Entre 10 et 50 unités · c) 30 unités, bénéfice maximal 400 €.

Correction de l'exercice 4 – Prix de vente et coût marginal

a) La recette est le prix multiplié par la quantité : $R(x) = 15x$. Le bénéfice est la recette moins le coût :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 15x - (x^3 - 6x^2 + 15x + 20) = -x^3 + 6x^2 - 20$$

b) On dérive puis on factorise par $-3x$:

$$B'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$$

— Sur $[0\,;6]$, $-3x \leq 0$; $x - 4$ est négatif avant 4 et positif après. Donc $B'(x) \geq 0$ sur $[0\,;4]$ et $B'(x) \leq 0$ sur $[4\,;6]$.

— B croît puis décroît : le maximum est atteint en $x = 4$, et $B(4) = -64 + 96 - 20 = 12$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Le bénéfice maximal vaut 12 milliers d'euros, pour 400 objets.

c) $C'(x) = 3x^2 - 12x + 15$, donc $C'(4) = 48 - 48 + 15 = 15$.

— Le coût marginal est **égal au prix de vente** au point où le bénéfice est maximal. Ce n'est pas un hasard : $B'(x) = 15 - C'(x)$ s'annule exactement quand $C'(x) = 15$. Tant que fabriquer une centaine de plus coûte moins que ce qu'elle rapporte, on a intérêt à produire davantage.

Réponse. a) $R(x) = 15x$, $B(x) = -x^3 + 6x^2 - 20$ · b) maximum 12 000 € pour 400 objets · c) $C'(4) = 15$, égal au prix de vente.

Correction de l'exercice 5 – Le coût de l'unité suivante

a) On dérive terme à terme ; la constante 200, qui représente les frais fixes, disparaît :

$$C'(x) = 0{,}5 \times 2x + 40 = x + 40$$

b) $C'(20) = 60$ et $C'(50) = 90$.

c) $C(20) = 200 + 800 + 200 = 1\,200$ et $C(21) = 220{,}5 + 840 + 200 = 1\,260{,}5$, donc $C(21) - C(20) = 60{,}5$ €.

— $C(50) = 1\,250 + 2\,000 + 200 = 3\,450$ et $C(51) = 1\,300{,}5 + 2\,040 + 200 = 3\,540{,}5$, donc $C(51) - C(50) = 90{,}5$ €.

— Le coût réel de l'unité suivante est très proche du coût marginal : $60{,}5 \approx 60$ et $90{,}5 \approx 90$. C'est la signification économique du nombre dérivé :

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$$

d) $C'(x) = x + 40$ augmente avec x : chaque unité supplémentaire coûte de plus en plus cher à fabriquer (environ 60 € pour la 21^{e}, environ 90 € pour la 51^{e}).

Réponse. a) $C'(x) = x + 40$ · b) 60 € et 90 € · c) 60,5 € et 90,5 €, très proches · d) il augmente avec la production.

Correction de l'exercice 6 – Choisir un prix de vente

a) La recette est le prix multiplié par la quantité vendue :

$$R(p) = p(1200 - 20p) = -20p^2 + 1200p$$

b) On dérive : $R'(p) = -40p + 1200$, qui s'annule en $p = 30$, positive avant et négative après. La recette est maximale pour un prix de 30 €.

c) À ce prix, on vend $q(30) = 1200 - 600 = 600$ articles, pour une recette de $30 \times 600 = 18\,000$ €.

Au-delà de 60 €, où $q(p) = 0$, plus personne n'achèterait. **Contrôle** : $R(25) = R(35) = 17\,500$ € $< 18\,000$ €. Réponses : $R(p) = -20p^2 + 1200p$; 30 **€** ; 600 **articles** et 18 000 **€**.

Réponse. a) $R(p) = -20p^2 + 1200p$ · b) 30 € · c) 600 articles, 18 000 €.

Correction de l'exercice 7 – Un bénéfice de degré 3

a) On dérive terme à terme, puis on met -3 en facteur :

$$B'(x) = -3x^2 + 30x - 48 = -3\left(x^2 - 10x + 16\right) = -3(x-2)(x-8)$$

La factorisation se vérifie en développant.

b) Le coefficient dominant est négatif : B' est négative à l'extérieur de 2 et 8, positive entre. En 2, la dérivée passe de $-$ à $+$: minimum local $B(2) = -8 + 60 - 96 + 100 = 56$. En 8, elle passe de $+$ à $-$: maximum local $B(8) = -512 + 960 - 384 + 100 = 164$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Aux bornes, $B(0) = 100$ et $B(10) = 120$: le maximum local 164 est aussi le maximum sur $[0\,;10]$, atteint pour 80 unités. Réponses : $B'(x) = -3(x-2)(x-8)$; minimum local 56 en 2, maximum 164 en 8.

Réponse. a) $-3(x-2)(x-8)$ · b) minimum local 56 en $x = 2$, maximum 164 en $x = 8$.

Correction de l'exercice 8 – Recette ou bénéfice ?

a) $R'(x) = -4x + 200$ s'annule en $x = 50$, positive avant et négative après : la recette est maximale pour 50 unités, avec $R(50) = 5000$ €.

b) Le bénéfice est la recette moins le coût :
$B(x) = -2x^2 + 200x - 40x - 600 = -2x^2 + 160x - 600$. Sa dérivée $B'(x) = -4x + 160$ s'annule en $x = 40$: le bénéfice est maximal pour 40 unités.

$$B(40) = -3200 + 6400 - 600 = 2600 \text{ €}$$

c) Le bénéfice culmine **avant** la recette : chaque unité supplémentaire coûte 40 €, et au-delà de 40 unités elle rapporte moins que ce qu'elle coûte. En produisant 50 unités, on ne gagnerait que $B(50) = 2400$ €, soit 200 € de moins.

Leçon : vendre plus n'est pas gagner plus. Réponses : 50 **unités** ; 40 **unités** ; le coût variable déplace l'optimum vers la gauche.

Réponse. a) 50 unités · b) 40 unités · c) le bénéfice culmine avant la recette, à cause du coût variable.

Correction de l'exercice 9 – Une contrainte de capacité

a) $B'(x) = -0{,}5x + 30$ s'annule en $x = 60$, positive avant et négative après : sans contrainte, le bénéfice serait maximal pour 60 unités, et vaudrait $B(60) = -900 + 1800 - 200 = 700$ €.

b) L'atelier ne peut pas dépasser 50 unités. Sur $[0\,;50]$, la dérivée reste positive, car $x < 60$: le bénéfice est **croissant** sur tout l'intervalle. Il est donc maximal à la borne, pour $x = 50$:

$$B(50) = -625 + 1500 - 200 = 675 \text{ €}$$

La contrainte de capacité coûte 25 € de bénéfice. **Leçon** : sur un intervalle fermé, l'optimum peut se trouver à une **borne**. Réponses : 60 **unités** (700 €) sans contrainte ; 50 **unités** (675 €) en réalité.

Réponse. a) 60 unités (700 €) · b) 50 unités, soit 675 €.

Correction de l'exercice 10 – Un enclos rectangulaire

a) Le périmètre vaut 80 m, donc la longueur et la largeur ont pour somme 40 m. Avec une largeur x, la longueur vaut $40 - x$, et

$$A(x) = x(40 - x) = -x^2 + 40x \qquad (0 < x < 40)$$

b) On dérive : $A'(x) = -2x + 40$, qui s'annule en $x = 20$, positive avant et négative après. L'aire est maximale pour une largeur de 20 m ; la longueur vaut alors $40 - 20 = 20$ m. L'enclos optimal est un **carré**, d'aire 400 m².

Contrôle : un rectangle de 15 m sur 25 m n'a qu'une aire de 375 m². À périmètre fixé, c'est le carré qui a la plus grande aire. Réponses : $A(x) = -x^2 + 40x$; un **carré de** 20 **m** de côté, d'aire 400 **m²**.

Réponse. a) $A(x) = -x^2 + 40x$ · b) un carré de 20 m de côté, aire 400 m².

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Un coût marginal croissant

a) Le coût marginal est la dérivée du coût ; les charges fixes disparaissent :

$$C'(x) = 0{,}3x^2 - 12x + 150$$

b) Pour trouver où ce coût marginal est le plus bas, on le dérive à son tour : $0{,}6x - 12$, qui s'annule en $x = 20$, négatif avant et positif après. Le coût marginal décroît puis croît : il est minimal pour 20 unités, et vaut $C'(20) = 120 - 240 + 150 = 30$ €.

L'atelier est le plus efficace vers 20 unités ; au-delà, chaque unité supplémentaire coûte de plus en plus cher. **Contrôle** : $C'(10) = 60$ € et $C'(30) = 60$ €, plus que 30 €. Réponses : $C'(x) = 0{,}3x^2 - 12x + 150$; 20 **unités**, coût marginal 30 **€**.

Réponse. a) $C'(x) = 0{,}3x^2 - 12x + 150$ · b) 20 unités, coût marginal 30 €.

Correction de l'exercice 12 – Comparer deux stratégies

a) Pour chaque stratégie, le bénéfice est la recette moins le coût $C(x) = 20x + 1500$.

$$B_A = 50 \times 90 - (1000 + 1500) = 2000 \qquad B_B = 80 \times 70 - (1600 + 1500) = 2500$$

b) La stratégie **B** rapporte 500 € de plus.

On le comprend avec la marge unitaire, prix moins coût variable : 70 € par unité pour A, 50 € pour B. La marge totale vaut $50 \times 70 = 3500$ € pour A et $80 \times 50 = 4000$ € pour B ; on retire ensuite les 1500 € de charges fixes.

Leçon : une marge unitaire plus faible peut rapporter davantage, si le volume vendu compense. Réponses : 2000 **€** et 2500 **€** ; la **stratégie B**.

Réponse. a) 2000 € et 2500 € · b) la stratégie B, 500 € de plus.

Correction de l'exercice 13 – Un seuil et un optimum

a) $B'(x) = -x + 30$ s'annule en $x = 30$, positive avant et négative après : le bénéfice est maximal pour 30 unités, et vaut $B(30) = -450 + 900 - 250 = 200$ €.

b) On développe la forme proposée :
$-0{,}5(x - 10)(x - 50) = -0{,}5\left(x^2 - 60x + 500\right) = -0{,}5x^2 + 30x - 250$, c'est bien $B(x)$. Les seuils de rentabilité sont les quantités où le bénéfice est nul :

$$-0{,}5(x - 10)(x - 50) = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ ou } x = 50$$

Entre 10 et 50 unités, le bénéfice est positif. Le maximum est atteint au milieu, 30, ce qui traduit la symétrie de la parabole.

Contrôle : $B(10) = -50 + 300 - 250 = 0$. Réponses : bénéfice maximal 200 **€** pour 30 unités ; seuils 10 et 50 **unités**.

Réponse. a) 200 € pour 30 unités · b) 10 et 50 unités.

Correction de l'exercice 14 – Repérer une erreur de raisonnement

Première faute : confondre recette et bénéfice. Le bénéfice est la recette moins le coût, donc $B'(x) = R'(x) - C'(x)$. Là où la recette est maximale, $R'(x) = 0$, et il reste $B'(x) = -C'(x)$, qui est négatif puisque le coût augmente avec la production. Le bénéfice y est déjà en train de **diminuer** : il a culminé plus tôt.

$$B'(x) = R'(x) - C'(x)$$

Seconde faute : retenir une solution négative. Une quantité produite est positive : la valeur -8 doit être rejetée. Il faut alors étudier le signe de B' sur $[0\,;+\infty[$. Si B' y est toujours négative, le bénéfice décroît dès le départ : l'activité n'est pas rentable. Si elle y

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

est toujours positive, on produit autant que la capacité le permet.

Leçon : toute solution mathématique doit être confrontée au contexte.

Réponse. Le bénéfice culmine avant la recette ; une solution négative doit être rejetée et remplacée par une étude de signe sur $[0\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 15 – Un abonnement à optimiser

a) Une baisse de x euros fixe le prix à $30-x$ et attire $20x$ abonnés supplémentaires, soit $400+20x$ abonnés. La recette mensuelle est le produit des deux :

$$R(x)=(30-x)(400+20x)=12\,000+600x-400x-20x^2=-20x^2+200x+12\,000$$

b) On dérive : $R'(x)=-40x+200$, qui s'annule en $x=5$, positive avant et négative après. La recette est maximale pour une baisse de 5 €.

Le prix passe alors à 25 € et le nombre d'abonnés à 500 : la recette vaut $25\times 500=12\,500$ €, soit 500 € de plus que les 12 000 € actuels. **Contrôle** : $R(4)=R(6)=12\,480$ €. Réponses : $R(x)=-20x^2+200x+12\,000$; baisser de 5 **€**, soit 25 € pour 500 abonnés.

Réponse. a) $R(x)=-20x^2+200x+12\,000$ · b) baisser de 5 €, soit 25 € pour 500 abonnés et 12 500 € de recette.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : étude complète d'une production

a) La recette vaut $70x$; on lui retire tout le coût :

$$B(x)=70x-\left(0{,}5x^2+10x+450\right)=-0{,}5x^2+60x-450$$

b) $B'(x)=-x+60$ s'annule en $x=60$, positive avant et négative après : le bénéfice est maximal pour 60 unités, et vaut $B(60)=-1800+3600-450=1350$ €.

c) On calcule le bénéfice près des endroits où il change de signe :

x	8	9	111	112
$B(x)$	-2	49,5	49,5	-2

Le bénéfice devient positif à partir de 9 unités et le reste jusqu'à 111 unités. Comme B croît jusqu'à 60 puis décroît, il est positif entre ces deux valeurs et négatif en dehors.

Réponses : $B(x)=-0{,}5x^2+60x-450$; 60 **unités** et 1350 **€** ; rentable de 9 **à** 111 **unités**.

Réponse. a) $B(x)=-0{,}5x^2+60x-450$ · b) 60 unités, 1350 € · c) rentable de 9 à 111 unités.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).