Plaquette 4 – Variations, extremums et tableaux

Dérivation et variations — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le théorème central.

Signe de f' sur un intervalle	Variation de f
$f'(x) > 0$	f est **croissante**
$f'(x) < 0$	f est **décroissante**
$f'(x) = 0$ partout	f est constante

Les extremums. Si f' s'annule **en changeant de signe** en x_0 :

Changement de signe	Nature
de $-$ à $+$	**minimum** en x_0
de $+$ à $-$	**maximum** en x_0
pas de changement	ni l'un ni l'autre

⚠ $f'(x_0) = 0$ **ne suffit pas**. Pour $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ et pourtant f est croissante partout.

La méthode en cinq temps.

Étape	Ce qu'on fait
1	calculer $f'(x)$
2	résoudre $f'(x) = 0$
3	étudier le **signe** de f'
4	dresser le tableau de variations
5	calculer les images aux extremums

Signe d'une dérivée du second degré. On la factorise (facteur commun, ou racine évidente) :

$$f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Un tableau de signes montre qu'elle est du signe de a **à l'extérieur** des racines, du signe contraire entre elles.

Extremum sur un intervalle fermé. Il faut comparer les extremums locaux **et** les valeurs aux bornes.

Correction de l'exercice 1 – Du signe aux variations

Le signe de la dérivée donne le sens de variation : f est décroissante là où f' est négative, croissante là où f' est positive.

— Sur $]-\infty\,;2[$, $f'(x) < 0$: f est **décroissante**.

— Sur $]2\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$: f est **croissante**.

En $x = 2$, la dérivée passe du signe $-$ au signe $+$: f descend puis remonte, et atteint un **minimum**, égal à $f(2) = -5$. C'est la plus petite valeur de f sur tout $\mathbb{R}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f(x) \geq -5 \text{ pour tout } x$$

La tangente en 2 est horizontale, d'équation $y = -5$. Par conséquent, l'équation $f(x) = -10$ n'a aucune solution. Réponse : f décroît jusqu'à 2, puis croît ; **minimum** -5 en $x = 2$.

Réponse. f décroît jusqu'à 2, puis croît : minimum -5 atteint en $x = 2$.

Correction de l'exercice 2 – Un minimum de parabole

On dérive : $f'(x) = 2x - 8$, fonction affine de coefficient positif, qui s'annule en $x = 4$. Elle est donc négative avant 4 et positive après : f décroît puis croît. On calcule $f(4) = 16 - 32 + 5 = -11$.

Intervalle	$]-\infty\,;4]$	$[4\,;+\infty[$
Signe de $f'(x)$	$-$	$+$
Variations de f	décroissante, jusqu'à -11	croissante, à partir de -11

La fonction atteint son **minimum** en $x = 4$:

$$f(4) = -11$$

Contrôle : $f(3) = f(5) = -10 > -11$. La fonction décroît sur $]-\infty\,;4]$ puis croît ; minimum -11 en $x = 4$.

Réponse. f décroît sur $]-\infty\,;4]$ puis croît : minimum -11 en $x = 4$.

Correction de l'exercice 3 – Un maximum de parabole

On dérive : $f'(x) = -6x + 12$, fonction affine de coefficient négatif, qui s'annule en $x = 2$. Elle est positive avant 2 et négative après : f croît puis décroît.

Intervalle	$]-\infty\,;2]$	$[2\,;+\infty[$
Signe de $f'(x)$	$+$	$-$
Variations de f	croissante, jusqu'à 13	décroissante, à partir de 13

La fonction atteint son **maximum** en $x = 2$:

$$f(2) = -12 + 24 + 1 = 13$$

C'est cohérent avec la forme de la courbe : le coefficient de x^2 est négatif, la parabole est tournée vers le bas. Donc $f(x) \leq 13$ pour tout x. **Contrôle** : $f(1) = f(3) = 10 < 13$. Maximum 13 en $x = 2$.

Réponse. f croît jusqu'à 2 puis décroît : maximum 13 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 4 – Un polynôme de degré 3

On dérive puis on factorise :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right) = 6(x+1)(x-2)$$

La factorisation se vérifie en développant. Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines -1 et 2, négatif entre elles.

Intervalle	$]-\infty\,;-1]$	$[-1\,;2]$	$[2\,;+\infty[$
Signe de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Variations de f	croissante	décroissante	croissante

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On calcule $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 4 = 11$ et $f(2) = 16 - 12 - 24 + 4 = -16$. La fonction admet un **maximum local** 11 en $x = -1$ et un **minimum local** -16 en $x = 2$. Ces extremums ne sont que locaux, car f prend des valeurs plus grandes et plus petites plus loin.

Réponse. Maximum local 11 en $x = -1$, minimum local -16 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 5 – Un autre degré 3

On dérive et on met 3 en facteur : $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3\left(x^2 + 2x - 8\right)$. On vérifie en développant que $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$:

$$f'(x) = 3(x + 4)(x - 2)$$

La dérivée s'annule en -4 et en 2 ; elle est positive à l'extérieur de ces valeurs et négative entre elles. La fonction croît, décroît, puis croît.

— En $x = -4$, f' passe de + à − : **maximum local**, $f(-4) = -64 + 48 + 96 = 80$.

— En $x = 2$, f' passe de − à + : **minimum local**, $f(2) = 8 + 12 - 48 = -28$.

Contrôle : $f'(0) = -24 < 0$, et 0 est bien entre -4 et 2. Réponses : maximum local 80 en -4, minimum local -28 en 2.

Réponse. Maximum local 80 en $x = -4$, minimum local -28 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 6 – Une fonction sans extremum

On dérive : $f'(x) = 6x^2 + 6$. Un carré est positif ou nul, donc $6x^2 \geq 0$, et

$$f'(x) = 6x^2 + 6 \geq 6 > 0$$

pour tout réel x. La dérivée ne s'annule jamais et ne change jamais de signe : f est **croissante** sur $\mathbb{R}$, sans aucune tangente horizontale.

Une fonction croissante sur tout $\mathbb{R}$ ne « redescend » jamais : elle ne peut avoir ni maximum ni minimum local. Son tableau de variations se réduit à une seule flèche montante.

Contrôle : $f(-1) = -13$, $f(0) = -5$ et $f(1) = 3$ augmentent bien. La fonction f n'a **aucun extremum**.

Réponse. $f'(x) = 6x^2 + 6 > 0$: f est strictement croissante, donc sans extremum.

Correction de l'exercice 7 – Maximum local ou maximum sur l'intervalle

a) On dérive terme à terme :

$$f'(t) = 3t^2 - 18t + 24$$

— On développe la forme proposée : $3(t - 2)(t - 4) = 3(t^2 - 6t + 8) = 3t^2 - 18t + 24$. Les deux écritures sont égales.

b) Les racines sont 2 et 4 ; avec un coefficient $3 > 0$, f' est positive en dehors de $[2\,;4]$ et négative entre 2 et 4.

— $f(0) = 10$; $f(2) = 8 - 36 + 48 + 10 = 30$; $f(4) = 64 - 144 + 96 + 10 = 26$; $f(6) = 216 - 324 + 144 + 10 = 46$.

Intervalle	$[0\,;2]$	$[2\,;4]$	$[4\,;6]$
Signe de $f'(t)$	+	−	+
Variations de f	de 10 à 30	de 30 à 26	de 26 à 46

c) f admet un **maximum local** $f(2) = 30$ (à 10 h), mais ce n'est pas la plus grande valeur

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sur l'intervalle : on compare toutes les valeurs du tableau, 10, 30, 26 et 46.

— La fréquentation est la plus forte à la fin de l'intervalle, en $t = 6$ (à 14 h), avec 46 000 connexions.

Piège. Un maximum local n'est pas forcément le maximum sur tout l'intervalle : il faut aussi regarder les valeurs aux bornes.

Réponse. Maximum local 30 (à 10 h) ; fréquentation la plus forte à 14 h, avec 46 000 connexions.

Correction de l'exercice 8 – Lire un tableau de variations

a) Le sens de variation donne le signe de la dérivée : $f' > 0$ sur $]-\infty\,;-2[$, où f croît ; $f' < 0$ sur $]-2\,;1[$, où elle décroît ; $f' > 0$ sur $]1\,;+\infty[$. La dérivée s'annule en -2 et en 1.

b) En -2, f passe de croissante à décroissante : **maximum local** 7. En 1, elle passe de décroissante à croissante : **minimum local** -4.

c) On regarde chaque partie du tableau. La première branche monte jusqu'à 7 : en partant de valeurs inférieures, elle passe une fois par 0. La deuxième descend de 7 à -4 : elle passe une fois par 0. La troisième remonte depuis -4 : elle passe encore une fois par 0.

$$7 > 0 > -4$$

On compte donc **trois** solutions. Si le maximum $f(-2)$ avait été négatif, il n'y en aurait eu qu'une. Réponses : +, −, + ; maximum 7 en -2, minimum -4 en 1 ; trois solutions.

Réponse. a) +, −, + · b) maximum 7 en -2, minimum -4 en 1 · c) trois solutions.

Correction de l'exercice 9 – Déterminer un intervalle de croissance

On dérive : $f'(x) = 0{,}5 \times 2x - 6 = x - 6$. La fonction est croissante là où sa dérivée est positive :

$$x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 6$$

f est donc croissante sur $[6\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;6]$. En 6, la dérivée passe de − à + : f atteint son **minimum**,

$$f(6) = 0{,}5 \times 36 - 36 + 20 = 2$$

Comme ce minimum est positif, f ne s'annule jamais. **Contrôle** : $f(4) = f(8) = 4 > 2$. La fonction est croissante sur $[6\,;+\infty[$, et son minimum vaut 2.

Réponse. Croissante sur $]6\,;+\infty[$, minimum 2 en $x = 6$.

Correction de l'exercice 10 – Maximiser un bénéfice

a) On dérive : $B'(x) = -0{,}5 \times 2x + 40 = -x + 40$, qui s'annule en $x = 40$. Elle est positive avant 40 et négative après : le bénéfice croît puis décroît, il est **maximal** pour 40 unités.

b) On calcule le bénéfice correspondant :

$$B(40) = -0{,}5 \times 1600 + 1600 - 300 = 500\ €$$

Contrôle : $B(30) = -450 + 1200 - 300 = 450$ € et $B(50) = -1250 + 2000 - 300 = 450$ €, tous deux inférieurs à 500 €. Le bénéfice est maximal pour 40 **unités** et vaut 500 **€**.

Réponse. a) 40 unités · b) 500 €.

Correction de l'exercice 11 – Extremums sur un intervalle fermé

Sur un intervalle fermé, le maximum et le minimum se trouvent soit en un point où la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

dérivée s'annule en changeant de signe, soit aux bornes. On dérive et on factorise :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

Les deux racines, -1 et 3, sont dans $[-2\,;4]$. On compare les images des deux bornes et des deux racines :

— $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$ et $f(4) = 64 - 48 - 36 + 5 = -15$;
— $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$ et $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.

La plus grande valeur est 10, la plus petite -22. Ici, les bornes ne l'emportent pas, mais il faut toujours les tester. Réponses : maximum 10 en $x = -1$, minimum -22 en $x = 3$.

Réponse. Maximum 10 en $x = -1$, minimum -22 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 12 – Dérivée nulle sans extremum

a) On dérive puis on factorise avec une identité remarquable :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 3(x-1)^2$$

b) Un carré n'est nul que si le nombre élevé au carré l'est : $f'(x) = 0$ pour $x = 1$ seulement.

c) Un carré est positif ou nul, donc $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$ partout : la dérivée s'annule en 1 **sans changer de signe**. La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ et n'a **pas d'extremum**, bien que sa tangente soit horizontale en $(1\,;1)$.

Contrôle : $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$ augmentent. **Leçon** : $f'(x_0) = 0$ ne suffit jamais à affirmer un extremum. Réponses : $f'(x) = 3(x-1)^2$; $x = 1$; non.

Réponse. a) $3(x-1)^2$ · b) $x = 1$ · c) non : la dérivée ne change pas de signe.

Correction de l'exercice 13 – Un coût minimal atteint deux fois

a) On dérive terme à terme, puis on met 3 en facteur :

$$C'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x^2 - 8x + 15)$$

— 3 est racine : $9 - 24 + 15 = 0$. On écrit $x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-b)$; le terme constant donne $3b = 15$, donc $b = 5$.
— $C'(x) = 3(x-3)(x-5)$.

b) C' est positive en dehors de $[3\,;5]$, négative entre 3 et 5.

— $C(2) = 8 - 48 + 90 + 50 = 100$; $C(3) = 27 - 108 + 135 + 50 = 104$; $C(5) = 125 - 300 + 225 + 50 = 100$; $C(8) = 512 - 768 + 360 + 50 = 154$.

Intervalle	$[2\,;3]$	$[3\,;5]$	$[5\,;8]$
Signe de $C'(x)$	$+$	$-$	$+$
Variations de C	de 100 à 104	de 104 à 100	de 100 à 154

c) On compare les valeurs du tableau : la plus petite est 100 €.

— Elle est atteinte **deux fois** : au minimum local $x = 5$ (50 pièces par heure) et à la borne $x = 2$ (20 pièces par heure).
— À coût égal, l'atelier a intérêt à produire 50 pièces par heure.

Réponse. Coût minimal 100 €, atteint pour $x = 2$ et pour $x = 5$ (20 ou 50 pièces par heure).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Choisir entre deux productions

a) On dérive puis on factorise :

$$B'(x) = -3x^2 + 24x - 36 = -3\left(x^2 - 8x + 12\right) = -3(x-2)(x-6)$$

b) Le coefficient dominant -3 étant négatif, la dérivée est négative à l’extérieur des racines et positive entre elles. En 2, elle passe de $-$ à $+$: minimum local $B(2) = -8 + 48 - 72 + 50 = 18$. En 6, elle passe de $+$ à $-$: maximum local $B(6) = -216 + 432 - 216 + 50 = 50$.

c) Sur $[0\,;10]$, on compare aussi les bornes : $B(0) = 50$ et $B(10) = -110$. Le maximum, 50, est atteint en $x = 0$ **et** en $x = 6$.

Produire 60 unités rapporte autant que ne rien produire, tout en faisant tourner l’atelier : on retient $x = 6$. Réponses : $-3(x-2)(x-6)$; minimum 18 en 2, maximum 50 en 6 ; $x = 6$, soit 60 unités.

Réponse. a) $-3(x-2)(x-6)$ · b) minimum 18 en 2, maximum 50 en 6 · c) $x = 6$ (soit 60 unités).

Correction de l’exercice 15 – Repérer une erreur

L’élève a raison sur deux points : $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(0) = 0$, et la tangente en 0 est horizontale, d’équation $y = 0$.

Son erreur est de conclure à un extremum. Il manque une condition : la dérivée doit **changer de signe**. Or $3x^2$ est positif avant 0 comme après : f est croissante sur tout $\mathbb{R}$, et il n’y a aucun extremum en 0.

On le vérifie sur des valeurs : si 0 était un minimum, on aurait $f(-1) \geq f(0) = 0$. Or

$$f(-1) = (-1)^3 = -1 < 0$$

Règle correcte : il y a un extremum en x_0 quand f' s’annule en x_0 **en changeant de signe**. Ici, f est croissante et n’a pas d’extremum en 0.

Réponse. $f'(0) = 0$ mais f' reste positive : f est croissante, sans extremum.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : étude complète

a) On dérive terme à terme : $f'(x) = 3x^2 - 12$.

b) On factorise : $f'(x) = 3\left(x^2 - 4\right) = 3(x-2)(x+2)$, qui s’annule en -2 et en 2, est positive à l’extérieur de ces valeurs et négative entre elles.

Intervalle	$]-\infty\,;-2]$	$[-2\,;2]$	$[2\,;+\infty[$
Signe de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Variations de f	croissante	décroissante	croissante

c) On calcule les images aux points où la dérivée change de signe :

$$f(-2) = -8 + 24 + 9 = 25 \qquad f(2) = 8 - 24 + 9 = -7$$

f admet un **maximum local** 25 en -2 et un **minimum local** -7 en 2. Comme $25 > 0 > -7$, la courbe traverse l’axe des abscisses trois fois. Réponses : $f'(x) = 3x^2 - 12$; croissante, décroissante sur $[-2\,;2]$, croissante ; maximum 25 en -2, minimum -7 en 2.

Réponse. a) $3x^2 - 12$ · b) croît, décroît sur $[-2\,;2]$, croît · c) maximum 25 en -2, minimum -7 en 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).