Plaquette 1 – Nombre dérivé, tangente et sens de variation

Dérivation et variations — Première STMG

Exercices

Méthode

On calcule un taux de variation puis un nombre dérivé, on écrit l'équation d'une tangente, on dérive des fonctions polynômes, et on utilise le **signe de la dérivée** pour dresser un tableau de variations. Les derniers exercices relient la dérivée à une vitesse, à un rythme d'évolution, au coût marginal et au bénéfice.

Exercice 1 – Taux de variation

Soit $f(x) = x^2$. Calculer le taux de variation de f entre 2 et 2,1, puis entre 2 et 2,01. Que peut-on conjecturer pour $f'(2)$?

Exercice 2 – Un taux de variation négatif

Soit $f(x) = 3 - x^2$.

a) Calculer le taux de variation de f entre 1 et 1,1, puis entre 1 et 1,01.

b) Quelle valeur peut-on conjecturer pour $f'(1)$? La confirmer avec la fonction dérivée.

c) Que signifie le signe de ce nombre pour la courbe ?

Exercice 3 – Lecture graphique d'un nombre dérivé

La tangente à la courbe de f au point $A(2\,;5)$ passe aussi par le point $B(4\,;11)$.

a) Déterminer $f'(2)$.

b) Donner l'équation de cette tangente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

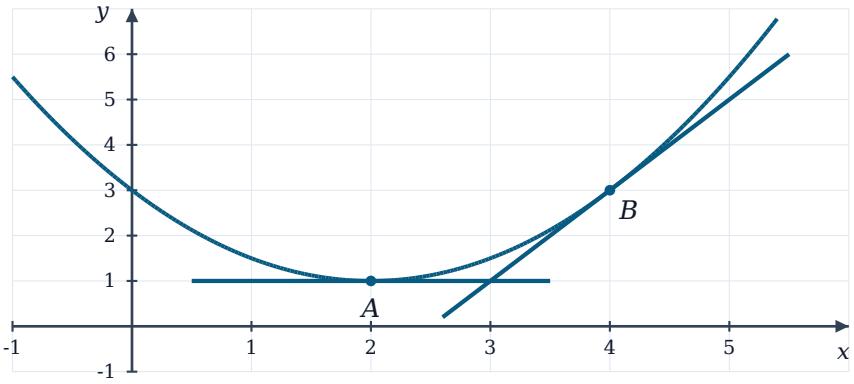
Exercice 4 – Lire nombres dérivés et tangentes

On a tracé la courbe d'une fonction f et ses tangentes aux points A et B d'abscisses 2 et 4. La tangente en A est horizontale ; la tangente en B passe par le point de coordonnées $(3\,;1)$.

a) Lire $f(2)$ et $f'(2)$.

b) Lire $f(4)$, puis déterminer $f'(4)$.

c) Donner l'équation réduite de la tangente en B.



La courbe $\mathcal{C}_f$ de f et ses tangentes en A et en B.

Exercice 5 – Dériver un polynôme

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a) $f(x) = 4x^2 - 7x + 3$

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

c) $h(x) = 0{,}5x^3 - 2x$

Exercice 6 – Équation de tangente

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

Exercice 7 – Tangente parallèle à une droite

Soit $f(x) = x^2 + x$. En quel point la tangente à la courbe de f est-elle parallèle à la droite d'équation $y = 5x + 1$? Donner l'équation de cette tangente.

Exercice 8 – Tangente horizontale

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$. En quel point la tangente à la courbe est-elle horizontale ?

Exercice 9 – Signe de la dérivée et variations

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 8$ sur $\mathbb{R}$. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Fonction de degré 3

Soit $f(x) = x^3 - 12x$ sur $[-4\,;4]$. Étudier ses variations et donner ses extremums locaux.

Exercice 11 – Vitesse moyenne et vitesse instantanée

Une trottinette démarre en ligne droite. La distance parcourue, en mètres, au bout de t secondes est $d(t) = 0{,}5t^2$ pour $0 \le t \le 10$.

a) Calculer la vitesse moyenne entre les instants $t = 4$ et $t = 6$.

b) Calculer $d'(t)$, puis la vitesse instantanée à l'instant $t = 5$. L'exprimer en km/h.

c) Calculer la vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 8$. Que remarque-t-on ?

Exercice 12 – Le nombre dérivé comme rythme d'évolution

Une plateforme de streaming compte $N(t) = 200 + 30t - t^2$ milliers d'abonnés t mois après son lancement, pour $0 \le t \le 15$.

a) Calculer $N'(t)$, puis $N'(5)$.

b) Interpréter $N'(5)$ dans le contexte.

c) Calculer $N(6) - N(5)$ et comparer à $N'(5)$.

d) À partir de quand le nombre d'abonnés cesse-t-il d'augmenter ?

Exercice 13 – Problème : coût marginal

Le coût total de production, en euros, de q objets ($0 \le q \le 60$) est

$$C(q) = 0{,}1q^3 - 6q^2 + 150q + 500$$

a) Calculer le coût marginal $C'(q)$.

b) Calculer $C'(10)$ et interpréter.

c) Le coût marginal est-il minimal pour une certaine production ?

Exercice 14 – Problème : bénéfice maximal

Une entreprise vend q articles (en centaines). Son bénéfice, en milliers d'euros, est

$$B(q) = -q^3 + 27q + 10 \qquad \text{pour } 0 \le q \le 6$$

Déterminer la production qui rend le bénéfice maximal, ainsi que ce bénéfice.

Exercice 15 – Synthèse : exploiter un tableau de variations

Soit f dérivable sur $[0\,;10]$, dont la dérivée a le signe suivant.

Intervalle	$[0\,;2]$	$[2\,;7]$	$[7\,;10]$
Signe de $f'(x)$	+	−	+

On sait de plus que $f(0) = 3$, $f(2) = 9$, $f(7) = 1$ et $f(10) = 6$.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Donner le maximum et le minimum de f sur $[0\,;10]$.

c) Combien de solutions l'équation $f(x) = 5$ admet-elle ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).