

Plaquette 5 - Optimiser une production

Dérivation et variations — Première STMG

Exercices

Méthode

En gestion, la dérivée répond toujours à la même question : **quelle quantité choisir ?** On modélise, on dérive, on annule, on conclut — et on vérifie que le maximum trouvé a un sens économique.

Exercice 1 - Maximiser une recette

La recette est $R(x) = x(200 - 2x)$ euros pour x unités vendues.

- Développer $R(x)$.
- Déterminer la quantité qui maximise la recette.
- Calculer la recette maximale.

Exercice 2 - Maximiser un bénéfice

Le prix de vente est 80 € et le coût total $C(x) = x^2 + 20x + 500$ euros.

- Exprimer le bénéfice.
- Déterminer la production optimale et le bénéfice maximal.

Exercice 3 - Les seuils de rentabilité

Avec $B(x) = -x^2 + 60x - 500$, déterminer les quantités pour lesquelles l'entreprise est bénéficiaire.

Exercice 4 - Minimiser un coût moyen

Le coût moyen est $CM(x) = 0,5x + 40 + \frac{200}{x}$ euros, $x > 0$.

- Calculer $CM'(x)$.
- Déterminer la production qui minimise le coût moyen.

Exercice 5 - Coût marginal et coût moyen

Le coût total est $C(x) = 0,5x^2 + 40x + 200$ euros.

- Calculer le coût moyen et le coût marginal.
- Les comparer en $x = 20$.
- Que constate-t-on ?

Exercice 6 - Choisir un prix de vente

La demande est $q(p) = 1200 - 20p$ articles quand le prix est p euros.

- Exprimer la recette en fonction de p .
- Déterminer le prix qui maximise la recette.
- Calculer la quantité vendue et la recette.

Exercice 7 - Un bénéfice de degré 3

Le bénéfice est $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 48x + 100$ milliers d'euros, x en dizaines d'unités, avec $0 \leq x \leq 10$.

- Calculer $B'(x)$ et la factoriser.
- Déterminer les extremums locaux.

Exercice 8 - Recette ou bénéfice ?

La recette est $R(x) = -2x^2 + 200x$ et le coût $C(x) = 40x + 600$.

- Quelle quantité maximise la recette ?
- Quelle quantité maximise le bénéfice ?
- Commenter l'écart.

Exercice 9 - Une contrainte de capacité

Le bénéfice est $B(x) = -0,25x^2 + 30x - 200$ euros, mais l'atelier ne peut produire que 50 unités au maximum.

- Quelle serait la production optimale sans contrainte ?
- Quelle est la production optimale réelle ?

Exercice 10 - Un enclos rectangulaire

On dispose de 80 m de clôture pour un enclos rectangulaire.

- Exprimer l'aire en fonction de la largeur x .
- Déterminer les dimensions qui maximisent l'aire.

Exercice 11 - Un coût marginal croissant

Le coût est $C(x) = 0,1x^3 - 6x^2 + 150x + 400$ euros.

- Calculer le coût marginal.
- Déterminer la production où le coût marginal est minimal.

Exercice 12 - Comparer deux stratégies

Stratégie A : vendre 50 unités à 90 €. Stratégie B : vendre 80 unités à 70 €. Le coût est $C(x) = 20x + 1500$.

- Calculer les deux bénéfices.
- Laquelle retenir ?

Exercice 13 - Un seuil et un optimum

Le bénéfice est $B(x) = -0,5x^2 + 30x - 250$ euros.

- Déterminer le bénéfice maximal.
- Déterminer les seuils de rentabilité.

Exercice 14 - Repérer une erreur de raisonnement

Un gérant écrit : « la recette est maximale pour 50 unités, donc le bénéfice aussi ».
Puis : « $B'(x) = 0$ donne $x = -8$, je produis donc -8 unités ». Corriger les deux fautes.

Exercice 15 - Un abonnement à optimiser

Une salle compte 400 abonnés à 30 € par mois. Une étude montre que chaque baisse de 1 € attire 20 abonnés de plus.

- Exprimer la recette mensuelle en fonction de la baisse x .
- Déterminer la baisse optimale.

Exercice 16 - Synthèse : étude complète d'une production

Le coût est $C(x) = 0,5x^2 + 10x + 450$ euros et le prix de vente 70 €.

- Exprimer le bénéfice.
- Déterminer la production optimale et le bénéfice maximal.
- Déterminer les seuils de rentabilité.