Plaquette 5 – Optimiser une production

Dérivation et variations — Première STMG

Exercices

Méthode

En gestion, la dérivée répond toujours à la même question : **quelle quantité choisir ?** On modélise, on dérive, on annule, on conclut — et on vérifie que le maximum trouvé a un sens économique.

Exercice 1 – Maximiser une recette

La recette est $R(x) = x(200 - 2x)$ euros pour x unités vendues.

a) Développer $R(x)$.

b) Déterminer la quantité qui maximise la recette.

c) Calculer la recette maximale.

Exercice 2 – Maximiser un bénéfice

Le prix de vente est 80 € et le coût total $C(x) = x^2 + 20x + 500$ euros.

a) Exprimer le bénéfice.

b) Déterminer la production optimale et le bénéfice maximal.

Exercice 3 – Les seuils de rentabilité

Le bénéfice d'une entreprise, en euros, est $B(x) = -x^2 + 60x - 500$ pour x unités vendues, $0 \leq x \leq 60$.

a) Vérifier que 10 est une racine de B, puis montrer que $B(x) = -(x - 10)(x - 50)$.

b) Dresser le tableau de signes de $B(x)$. Pour quelles quantités l'entreprise ne perd-elle pas d'argent ?

c) Pour quelle quantité le bénéfice est-il maximal ?

Exercice 4 – Prix de vente et coût marginal

Une entreprise fabrique x centaines d'objets, $0 \leq x \leq 6$. Le coût total, en milliers d'euros, est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 20$, et chaque centaine est vendue 15 milliers d'euros.

a) Exprimer la recette $R(x)$ puis le bénéfice $B(x)$.

b) Étudier les variations de B et déterminer le bénéfice maximal.

c) Calculer le coût marginal $C'(4)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 5 – Le coût de l'unité suivante

Le coût total de fabrication de x unités est $C(x) = 0{,}5x^2 + 40x + 200$ euros.

a) Calculer le coût marginal $C'(x)$.

b) Calculer $C'(20)$ et $C'(50)$.

c) Calculer $C(21) - C(20)$ et $C(51) - C(50)$, puis comparer aux résultats de b).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Comment évolue le coût de l'unité supplémentaire quand la production augmente ?

Exercice 6 – Choisir un prix de vente

La demande est $q(p) = 1200 - 20p$ articles quand le prix est p euros.

a) Exprimer la recette en fonction de p.

b) Déterminer le prix qui maximise la recette.

c) Calculer la quantité vendue et la recette.

Exercice 7 – Un bénéfice de degré 3

Le bénéfice est $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 48x + 100$ milliers d'euros, x en dizaines d'unités, avec $0 \leq x \leq 10$.

a) Calculer $B'(x)$ et la factoriser.

b) Déterminer les extremums locaux.

Exercice 8 – Recette ou bénéfice ?

La recette est $R(x) = -2x^2 + 200x$ et le coût $C(x) = 40x + 600$.

a) Quelle quantité maximise la recette ?

b) Quelle quantité maximise le bénéfice ?

c) Commenter l'écart.

Exercice 9 – Une contrainte de capacité

Le bénéfice est $B(x) = -0{,}25x^2 + 30x - 200$ euros, mais l'atelier ne peut produire que 50 unités au maximum.

a) Quelle serait la production optimale sans contrainte ?

b) Quelle est la production optimale réelle ?

Exercice 10 – Un enclos rectangulaire

On dispose de 80 m de clôture pour un enclos rectangulaire.

a) Exprimer l'aire en fonction de la largeur x.

b) Déterminer les dimensions qui maximisent l'aire.

Exercice 11 – Un coût marginal croissant

Le coût est $C(x) = 0{,}1x^3 - 6x^2 + 150x + 400$ euros.

a) Calculer le coût marginal.

b) Déterminer la production où le coût marginal est minimal.

Exercice 12 – Comparer deux stratégies

Stratégie A : vendre 50 unités à 90 €. Stratégie B : vendre 80 unités à 70 €. Le coût est $C(x) = 20x + 1500$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Calculer les deux bénéfices.
b) Laquelle retenir ?

Exercice 13 – Un seuil et un optimum

Le bénéfice est $B(x) = -0{,}5x^2 + 30x - 250$ euros.

a) Déterminer le bénéfice maximal.
b) Vérifier que $B(x) = -0{,}5(x - 10)(x - 50)$, puis déterminer les seuils de rentabilité.

Exercice 14 – Repérer une erreur de raisonnement

Un gérant écrit : « la recette est maximale pour 50 unités, donc le bénéfice aussi ». Puis : « $B'(x) = 0$ donne $x = -8$, je produis donc -8 unités ». Corriger les deux fautes.

Exercice 15 – Un abonnement à optimiser

Une salle compte 400 abonnés à 30 € par mois. Une étude montre que chaque baisse de 1 € attire 20 abonnés de plus.

a) Exprimer la recette mensuelle en fonction de la baisse x.
b) Déterminer la baisse optimale.

Exercice 16 – Synthèse : étude complète d'une production

Le coût est $C(x) = 0{,}5x^2 + 10x + 450$ euros et le prix de vente 70 €.

a) Exprimer le bénéfice.
b) Déterminer la production optimale et le bénéfice maximal.
c) À l'aide d'un tableau de valeurs, déterminer les quantités entières pour lesquelles l'entreprise est rentable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).