

Plaquette 2 - Axe de symétrie, sommet et variations

Fonctions polynômes du second degré — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

L'axe de symétrie passe au milieu de deux points de même ordonnée. Si $f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$, l'axe a pour équation

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Deux façons d'obtenir deux points de même ordonnée.

Écriture de f	Méthode
$a(x - x_1)(x - x_2)$	les racines : $f(x_1) = f(x_2) = 0$
$ax^2 + bx + c$	résoudre $f(x) = c$, qui donne $x(ax + b) = 0$
$ax^2 + c$	l'axe est l'axe des ordonnées, $x = 0$

Sommet. Son abscisse α est celle de l'axe ; son ordonnée est $f(\alpha)$.

Variations.

Signe de a	Variations	Le sommet est
$a > 0$	décroissante puis croissante	un minimum
$a < 0$	croissante puis décroissante	un maximum

⚠ Une **racine** n'est pas le sommet : c'est un point où la courbe coupe l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 1 - L'axe au milieu des racines

a) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $f(x) = 0$ pour $x = 1$ ou $x = 7$. Ces deux nombres ont la même image, 0, donc l'axe de symétrie passe à mi-chemin :

$$x = \frac{1+7}{2} = 4$$

b) L'abscisse du sommet est 4 et son ordonnée est $f(4) = 2 \times 3 \times (-3) = -18$. Le sommet est le point $S(4; -18)$.

c) Le coefficient $a = 2$ est positif : la parabole est tournée vers le haut, f est décroissante puis croissante, et le sommet est un minimum.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-18	$\nearrow$	

f admet un minimum égal à -18 , atteint en $x = 4$.

Réponse. a) racines 1 et 7, axe $x = 4$ — b) $S(4; -18)$ — c) décroissante puis croissante, minimum -18 .

Correction de l'exercice 2 - L'axe en résolvant $f(x) = c$

a) $f(0) = 5$. On résout $f(x) = 5$:

$$x^2 - 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x - 6) = 0$$

Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x = 6$.

b) Les nombres 0 et 6 ont la même image, 5. L'axe de symétrie passe à mi-chemin, il a pour équation $x = \frac{0+6}{2} = 3$.

Le sommet a pour abscisse 3 et pour ordonnée $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$: c'est le point $S(3; -4)$. Comme $a = 1 > 0$, c'est un minimum.

Cette méthode marche pour toute expression $ax^2 + bx + c$: l'équation $f(x) = c$ se ramène toujours à $x(ax + b) = 0$, dont 0 est une solution.

Réponse. a) $f(0) = 5$; $x = 0$ ou $x = 6$ — b) axe $x = 3$, sommet $(3; -4)$, minimum.

Correction de l'exercice 3 - Une parabole tournée vers le bas

On cherche deux nombres de même image. Comme $f(0) = -7$, on résout $f(x) = -7$:

$$-x^2 + 8x - 7 = -7 \Leftrightarrow -x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 8) = 0$$

donc $x = 0$ ou $x = 8$. L'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{0+8}{2} = 4$.

Sommet : $f(4) = -16 + 32 - 7 = 9$, c'est le point $S(4; 9)$.

Le coefficient de x^2 est $-1 < 0$: la parabole est tournée vers le bas, f est croissante puis décroissante et le sommet est un **maximum**.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	9	$\searrow$	

f admet un maximum égal à 9, atteint en $x = 4$.

Réponse. Axe $x = 4$, sommet $(4; 9)$, croissante puis décroissante, maximum 9.

Correction de l'exercice 4 - Une fonction de la forme $ax^2 + c$

a) Pour tout nombre x , $f(-x) = -3(-x)^2 + 12 = -3x^2 + 12 = f(x)$: deux nombres opposés ont la même image. La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$.

Le sommet a pour abscisse 0 et pour ordonnée $f(0) = 12$: c'est le point $(0; 12)$.

b) $a = -3 < 0$: f est croissante sur $] -\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$; elle admet un maximum égal à 12 en $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	12	$\searrow$	

c) $f(2) = -3 \times 4 + 12 = 0$ et $f(-2) = -12 + 12 = 0$. Les racines sont bien symétriques par rapport à l'axe $x = 0$.

Réponse. a) axe $x = 0$, sommet $(0; 12)$ — b) croissante puis décroissante, maximum 12 — c) $f(2) = f(-2) = 0$.

Correction de l'exercice 5 - Variations d'une forme factorisée

a) $g(x) = 0$ si $x + 2 = 0$ ou $x - 6 = 0$, c'est-à-dire $x = -2$ ou $x = 6$. Attention au signe : le facteur $x + 2$ s'annule en -2 , pas en 2.

L'axe de symétrie passe au milieu des racines :

$$x = \frac{-2+6}{2} = 2$$

b) L'extremum est atteint au sommet, d'abscisse 2 :

$$g(2) = -0,5 \times 4 \times (-4) = 8$$

Le coefficient $a = -0,5$ est négatif : la parabole est tournée vers le bas, et 8 est le **maximum** de g , atteint en $x = 2$.

Réponse. a) racines -2 et 6 , axe $x = 2$ — b) maximum 8 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 6 - Un sommet d'abscisse décimale

On résout $f(x) = f(0)$, avec $f(0) = 1$:

$$2x^2 - 6x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0$$

donc $x = 0$ ou $x = 3$. L'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{0+3}{2} = 1,5$.

L'ordonnée du sommet est

$$f(1,5) = 2 \times 2,25 - 9 + 1 = 4,5 - 9 + 1 = -3,5$$

Le sommet est le point $S(1,5; -3,5)$. Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut et $-3,5$ est le **minimum** de f . L'abscisse du sommet n'a aucune raison d'être entière : la méthode fonctionne de la même façon.

Réponse. Sommet $(1,5; -3,5)$, minimum.

Correction de l'exercice 7 - Utiliser la symétrie

a) Deux nombres situés à la même distance de 3, de part et d'autre, ont la même image. Le symétrique d'un nombre x par rapport à 3 est $6 - x$, puisque 3 est le milieu de x et de $6 - x$:

$$f(6 - x) = f(x)$$

- 6 est le symétrique de 0, donc $f(6) = f(0) = 11$;
- 5 est le symétrique de 1, donc $f(5) = f(1) = 6$;
- 7 est le symétrique de -1 , donc $f(7) = f(-1) = 18$.

b) Le sommet est le point d'abscisse 3, d'ordonnée $f(3) = 2$. Les autres images (6, 11, 18) sont plus grandes et augmentent quand on s'éloigne de 3 : le sommet est un minimum, la parabole est tournée vers le haut.

Réponse. a) $f(6) = 11$, $f(5) = 6$, $f(7) = 18$ — b) vers le haut.

Correction de l'exercice 8 - Lire l'axe dans un tableau de valeurs

a) Les images sont symétriques autour de $x = 2$: $f(1) = f(3) = 4$, $f(0) = f(4) = 1$, $f(-1) = f(5) = -4$. Par exemple, 1 et 3 ont la même image, donc l'axe a pour équation

$$x = \frac{1+3}{2} = 2$$

Le sommet est le point $(2; 5)$.

b) Les valeurs augmentent jusqu'à $x = 2$ puis diminuent :

x	-1		2		5
$f(x)$	-4	↗	5	↘	-4

c) $f(2) = -4 + 8 + 1 = 5$: la valeur lue est exacte. Le coefficient $a = -1 < 0$ confirme une

parabole tournée vers le bas, avec un maximum égal à 5.

Réponse. a) axe $x = 2$, sommet $(2; 5)$ — b) croissante puis décroissante — c) $f(2) = 5$.

Correction de l'exercice 9 - Lire une parabole

a) La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 2 et 6 : ce sont les racines. L'axe de symétrie passe à mi-chemin :

$$x = \frac{2+6}{2} = 4$$

Le point le plus bas de la courbe est le sommet, que l'on lit en $(4; -2)$.

b) g est décroissante puis croissante :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

c) $g(2) = 0$ et $g(6) = 0$ car un facteur s'annule ; $g(4) = 0,5 \times 2 \times (-2) = -2$. Les lectures sont confirmées, et $a = 0,5 > 0$ correspond bien à une parabole tournée vers le haut.

Réponse. a) racines 2 et 6, axe $x = 4$, sommet $(4; -2)$ — b) décroissante puis croissante, minimum -2.

Correction de l'exercice 10 - Un bénéfice maximal

a) $B(0) = -600$: sans aucune vente, l'artisan perd 600 €, ce qui correspond à ses frais fixes de la semaine.

b) On résout $B(q) = B(0)$, soit $B(q) = -600$:

$$-2q^2 + 80q - 600 = -600 \Leftrightarrow -2q^2 + 80q = 0 \Leftrightarrow -2q(q - 40) = 0$$

donc $q = 0$ ou $q = 40$. L'axe de symétrie est $q = \frac{0+40}{2} = 20$.

$$B(20) = -2 \times 400 + 1600 - 600 = 200$$

Le coefficient de q^2 est $-2 < 0$: le sommet est un maximum. Le bénéfice est maximal pour 20 objets vendus, et il vaut alors 200 €.

Réponse. a) -600 € de frais fixes — b) 20 objets, pour un bénéfice de 200 €.

Correction de l'exercice 11 - Un coût unitaire minimal

On cherche l'axe de symétrie. $C(0) = 500$, et on résout $C(x) = 500$:

$$x^2 - 40x + 500 = 500 \Leftrightarrow x(x - 40) = 0$$

donc $x = 0$ ou $x = 40$. L'axe a pour équation $x = \frac{0+40}{2} = 20$.

Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut : le sommet est un minimum.

$$C(20) = 400 - 800 + 500 = 100$$

Le coût est minimal pour $x = 20$, c'est-à-dire une température de 200 degrés, et il vaut alors 100 € par pièce. Trop froid ou trop chaud, le four produit plus de rebuts, ce qui fait monter le coût.

Réponse. $x = 20$ (soit 200 degrés), coût minimal de 100 €.

Correction de l'exercice 12 - L'enclos le plus grand

a) $A(x) = 0$ si $x = 0$ ou $40 - 2x = 0$, c'est-à-dire $x = 20$. Ce sont les deux cas extrêmes où l'enclos est aplati.

b) L'axe de symétrie passe au milieu des racines, en $x = \frac{0+20}{2} = 10$. En développant, $A(x) = -2x^2 + 40x$: le coefficient de x^2 est $-2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas et le sommet est un maximum.

$$A(10) = 10 \times (40 - 20) = 200$$

L'aire est maximale pour une largeur de 10 m ; l'enclos mesure alors 10 m sur $40 - 20 = 20$ m, pour une aire de 200 m². Le côté parallèle au mur est deux fois plus long que les deux autres.

Réponse. a) 0 et 20 — b) $x = 10$ m, aire maximale 200 m², enclos de 10 m sur 20 m.

Correction de l'exercice 13 - Le prix qui maximise la recette

$R(p) = 0$ pour $p = 0$ ou $p = 50$: ce sont les racines. L'axe de symétrie de la parabole passe au milieu :

$$p = \frac{0+50}{2} = 25$$

En développant, $R(p) = -4p^2 + 200p$: le coefficient de p^2 est $-4 < 0$, la parabole est tournée vers le bas, et son sommet est le point le plus haut. La recette est donc maximale pour $p = 25$ €, et elle vaut

$$R(25) = -4 \times 25 \times (-25) = 2500 \text{ €}$$

La conjecture faite en lisant quelques valeurs ($R(10) = R(40) = 1600$) est maintenant démontrée.

Réponse. Axe $p = 25$, parabole vers le bas : recette maximale de 2500 € pour $p = 25$ €.

Correction de l'exercice 14 - Repérer une erreur

L'erreur. L'élève confond une **racine** et le **sommet**. Une racine est une abscisse où la courbe coupe l'axe des abscisses ; le maximum est atteint au sommet, sur l'axe de symétrie.

La correction. $f(x) = -x(x - 6)$: les racines sont bien 0 et 6. L'axe de symétrie passe au milieu :

$$x = \frac{0+6}{2} = 3 \quad f(3) = -9 + 18 = 9$$

Comme $a = -1 < 0$, le sommet est un maximum : f atteint son maximum 9 en $x = 3$. La valeur 0 proposée par l'élève est d'ailleurs plus petite que $f(3)$: elle ne pouvait pas être un maximum.

Réponse. Le maximum est $f(3) = 9$, atteint en $x = 3$, au milieu des racines.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète

a) $f(0) = -6$. On résout $f(x) = -6$:

$$-0,5x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-0,5x + 4) = 0$$

donc $x = 0$ ou $-0,5x + 4 = 0$, soit $x = 8$. L'axe a pour équation $x = \frac{0+8}{2} = 4$, et $f(4) = -8 + 16 - 6 = 2$: le sommet est $S(4; 2)$.

b) On développe : $(x - 2)(x - 6) = x^2 - 8x + 12$, donc

$-0,5(x-2)(x-6) = -0,5x^2 + 4x - 6 = f(x)$. Les racines sont 2 et 6 ; leur milieu est bien 4, ce qui confirme l'axe.

c) $a = -0,5 < 0$: f est croissante puis décroissante. Aux bornes, $f(0) = f(8) = -6$.

x	0		4		8
$f(x)$	-6	↗	2	↘	-6

f admet sur $[0 ; 8]$ un maximum égal à 2, atteint en $x = 4$.

Réponse. a) axe $x = 4$, sommet $(4 ; 2)$ — b) racines 2 et 6 — c) maximum 2 en $x = 4$.