

Plaquette 5 – Modéliser une situation économique

Fonctions polynômes du second degré — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

La démarche.

1. Identifier la grandeur étudiée et la variable, avec leurs unités. 2. Écrire le modèle, de préférence sous **forme factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. 3. Racines : là où la grandeur s'annule (recette nulle, seuil de rentabilité). 4. Axe de symétrie au milieu des racines :

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{extremum : } f(\alpha)$$

5. Maximum si $a < 0$, minimum si $a > 0$. 6. Seuils : résoudre $f(x) \geq k$ en ramenant à 0 et en factorisant.

Modèles fréquents.

Situation	Modèle
recette = prix $\times$ quantité vendue	$R(p) = p(N - kp)$
bénéfice = recette – coût	$B(q) = R(q) - C(q)$
aire d'un rectangle de périmètre fixé	$A(x) = x(L - x)$

Domaine de validité. Un modèle n'a de sens que sur un intervalle : une quantité, un prix, une durée sont positifs, et une parabole finit toujours par donner des valeurs absurdes.

Correction de l'exercice 1 - Le prix d'un concert

a) La recette est le prix multiplié par le nombre de places vendues :

$$R(p) = p(600 - 10p) = -10p(p - 60)$$

On a mis -10 en facteur dans la seconde parenthèse : $600 - 10p = -10(p - 60)$.

b) Les racines sont 0 et 60 : à 0 €, la recette est nulle ; à 60 €, plus aucune place ne se vend. L'axe de symétrie passe au milieu, en $p = 30$. Comme $a = -10 < 0$, la parabole est tournée vers le bas et le sommet est un maximum :

$$R(30) = 30 \times (600 - 300) = 30 \times 300 = 9000 \text{ €}$$

Le prix optimal est 30 € ; l'organisateur vend alors 300 places, pour une recette de 9000 €. Un prix plus élevé ferait perdre trop de spectateurs.

Réponse. a) $R(p) = -10p(p - 60)$ — b) 30 €, 300 places, recette maximale de 9000 €.

Correction de l'exercice 2 - La trajectoire d'un ballon

a) Le ballon est au sol quand $h(t) = 0$, c'est-à-dire pour $t = 0$ (le départ) ou $t = 4$. Il retombe au bout de 4 secondes.

b) L'axe de symétrie passe au milieu des racines, en $t = 2$. Comme $a = -5 < 0$, c'est un maximum : $h(2) = -5 \times 2 \times (-2) = 20$ m, atteint après 2 secondes.

c) On résout $h(t) \geq 15$, soit $-5t^2 + 20t \geq 15$. On ramène à 0 et on divise par -5 , ce qui

change le sens :

$$-5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 3) \leq 0$$

Le produit est négatif ou nul entre ses racines : $t \in [1 ; 3]$. Le ballon est à au moins 15 m de hauteur pendant 2 secondes, entre $t = 1$ et $t = 3$, de part et d'autre du sommet.

Réponse. a) au bout de 4 s — b) 20 m à $t = 2$ s — c) pendant 2 s, entre $t = 1$ et $t = 3$.

Correction de l'exercice 3 - Les abonnés d'une application

a) $N(0) = 100$: 100 000 abonnés au lancement.

b) On résout $N(t) = N(0)$:

$$-2t^2 + 24t + 100 = 100 \Leftrightarrow -2t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow -2t(t - 12) = 0$$

donc $t = 0$ ou $t = 12$. L'axe de symétrie est $t = \frac{0 + 12}{2} = 6$, et $a = -2 < 0$: c'est un maximum.

$$N(6) = -72 + 144 + 100 = 172$$

Le nombre d'abonnés est maximal au bout de 6 mois, avec 172 000 abonnés.

c) D'après le calcul précédent, $N(12) = 100$: au bout de 12 mois, l'application retrouve son nombre d'abonnés de départ. Le modèle prévoit ensuite une baisse, qui finirait par donner des valeurs négatives : il n'est valable que sur une durée limitée.

Réponse. a) 100 000 — b) au bout de 6 mois, 172 000 abonnés — c) au bout de 12 mois.

Correction de l'exercice 4 - Des ventes saisonnières

a) Les ventes sont nulles en février ($t = 2$) et en octobre ($t = 10$). L'axe de symétrie passe au milieu, en $t = 6$; comme $a = -3 < 0$, c'est un maximum :

$$V(6) = -3 \times 4 \times (-4) = 48$$

Les ventes culminent en juin ($t = 6$), avec 48 000 articles.

b) On résout $V(t) \geq 36$. On développe : $V(t) = -3(t^2 - 12t + 20)$, puis on divise par -3 , ce qui change le sens :

$$t^2 - 12t + 20 \leq -12 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 32 \leq 0$$

4 est une racine évidente ($16 - 48 + 32 = 0$), et l'autre vaut $\frac{32}{4} = 8$: $(t - 4)(t - 8) \leq 0$, donc $t \in [4 ; 8]$.

Les ventes atteignent au moins 36 000 articles d'avril à août. Contrôle :

$$V(4) = -3 \times 2 \times (-6) = 36.$$

Réponse. a) en juin, 48 000 articles — b) d'avril à août ($t \in [4 ; 8]$).

Correction de l'exercice 5 - Un prix et une demande

a) $R(p) = p(120 - 2p) = -2p(p - 60)$.

b) Les racines sont 0 et 60, l'axe de symétrie passe en $p = 30$ et $a = -2 < 0$:

$$R(30) = 30 \times 60 = 1800 \text{ €}$$

La recette est maximale, 1800 €, pour un prix de 30 € (avec 60 articles vendus).

c) On résout $-2p^2 + 120p \geq 1600$. On ramène à 0 et on divise par -2 (le sens change) :

$$p^2 - 60p + 800 \leq 0$$

20 est racine ($400 - 1200 + 800 = 0$) et l'autre est $\frac{800}{20} = 40$: $(p - 20)(p - 40) \leq 0$, donc $p \in [20; 40]$. La recette dépasse 1600 € pour un prix entre 20 € et 40 €.

Réponse. a) $R(p) = -2p(p - 60) - b$ 30 €, recette de 1800 € — c) $p \in [20; 40]$.

Correction de l'exercice 6 - Un coût de production minimal

a) $C(0) = 150$. On résout $C(q) = 150$: $q^2 - 20q = 0$, soit $q(q - 20) = 0$, donc $q = 0$ ou $q = 20$. L'axe est $q = 10$; $a = 1 > 0$, c'est un minimum :

$$C(10) = 100 - 200 + 150 = 50$$

Le coût est minimal pour 1000 unités et vaut 50 centaines d'euros, soit 5000 €.

b) 7500 € font 75 centaines d'euros. On résout $C(q) \leq 75$:

$$q^2 - 20q + 75 \leq 0$$

5 est racine ($25 - 100 + 75 = 0$), l'autre vaut $\frac{75}{5} = 15$: $(q - 5)(q - 15) \leq 0$, donc $q \in [5; 15]$. Le coût reste sous 7500 € pour une production entre 500 et 1500 unités.

Réponse. a) 1000 unités, coût minimal de 5000 € — b) entre 500 et 1500 unités.

Correction de l'exercice 7 - La fréquentation d'un parc de loisirs

a) L'axe de symétrie passe au milieu des racines 5 et 45, en $T = 25$. Comme $a = -0,2 < 0$, c'est un maximum :

$$F(25) = -0,2 \times 20 \times (-20) = 80$$

La fréquentation maximale est de 8000 visiteurs, par 25 °C.

b) On résout $F(T) \geq 60$. On développe : $(T - 5)(T - 45) = T^2 - 50T + 225$. On divise par $-0,2$, ce qui change le sens :

$$T^2 - 50T + 225 \leq -300 \Leftrightarrow T^2 - 50T + 525 \leq 0$$

15 est racine ($225 - 750 + 525 = 0$), et l'autre vaut $\frac{525}{15} = 35$. Donc $(T - 15)(T - 35) \leq 0$: $T \in [15; 35]$.

Le parc accueille au moins 6000 visiteurs quand il fait entre 15 et 35 °C.

Réponse. a) 25 °C, 8000 visiteurs — b) entre 15 et 35 °C.

Correction de l'exercice 8 - Lire un graphique de bénéfice

a) La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses entre $q = 5$ et $q = 35$: l'atelier est rentable entre 5 et 35 objets par jour. Le point le plus haut se lit en $q = 20$, pour un bénéfice d'environ 225 €.

b) Les racines de B sont 5 et 35, et $a = -1 < 0$: $B(q)$ est positif entre les racines, ce qui confirme la zone de rentabilité $[5; 35]$.

L'axe de symétrie passe au milieu des racines :

$$q = \frac{5 + 35}{2} = 20 \quad B(20) = -15 \times (-15) = 225$$

Le bénéfice maximal est exactement de 225 €, pour 20 objets par jour.

Réponse. Rentable de 5 à 35 objets ; bénéfice maximal de 225 € pour 20 objets.

Correction de l'exercice 9 - Le plus grand terrain pour un périmètre donné

a) Le périmètre vaut $2 \times (\text{largeur} + \text{longueur}) = 60$, donc la largeur et la longueur ont pour somme 30 : la longueur vaut $30 - x$. L'aire est

$$A(x) = x(30 - x) = -x(x - 30)$$

avec x entre 0 et 30.

b) Les racines sont 0 et 30, l'axe de symétrie passe en $x = 15$, et $a = -1 < 0$: c'est un maximum.

$A(15) = 15 \times 15 = 225 \text{ m}^2$. Les dimensions optimales sont 15 m sur 15 m : le terrain est un **carré**. Pour comparaison, un terrain de 10 m sur 20 m n'a que 200 m^2 , pour la même longueur de clôture.

Réponse. a) longueur $30 - x$, $A(x) = x(30 - x)$ — b) un carré de 15 m de côté, 225 m^2 .

Correction de l'exercice 10 - Deux fournisseurs

On cherche quand $C_1(q) < C_2(q)$, c'est-à-dire quand la différence est négative :

$$q^2 + 15 - 8q < 0 \Leftrightarrow q^2 - 8q + 15 < 0$$

3 est une racine évidente ($9 - 24 + 15 = 0$), et l'autre vaut $\frac{15}{3} = 5$:

$$q^2 - 8q + 15 = (q - 3)(q - 5).$$

Avec $a = 1 > 0$, le produit est négatif entre les racines, racines exclues : $q \in]3 ; 5[$.

Le premier fournisseur est le moins cher pour une commande comprise strictement entre 3 et 5 tonnes ; pour 3 ou 5 tonnes, les deux prix sont égaux ; en dehors, le second est plus avantageux. Contrôle pour 4 tonnes : $C_1(4) = 31$ et $C_2(4) = 32$.

Réponse. Pour $q \in]3 ; 5[$ tonnes.

Correction de l'exercice 11 - Le rendement d'une parcelle

a) $Y(x) = x(-0,5x + 20) = -0,5x(x - 40)$: les racines sont 0 et 40, l'axe de symétrie passe en $x = 20$, et $a = -0,5 < 0$:

$$Y(20) = -0,5 \times 20 \times (-20) = 200$$

Le meilleur rendement, 200 quintaux, est obtenu avec 20 kg d'engrais. Au-delà, l'excès d'engrais nuit aux cultures.

b) On résout $-0,5x^2 + 20x \geq 150$. On ramène à 0 et on multiplie par -2 (le sens change) :

$$x^2 - 40x + 300 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 10)(x - 30) \leq 0$$

(10 est racine : $100 - 400 + 300 = 0$, et $\frac{300}{10} = 30$.) Le rendement atteint au moins 150 quintaux pour une quantité d'engrais comprise entre 10 et 30 kg.

Réponse. a) 20 kg, 200 quintaux — b) entre 10 et 30 kg.

Correction de l'exercice 12 - Repérer un modèle utilisé hors de son domaine

Le calcul donne

$$V(12) = -3 \times 10 \times 2 = -60$$

soit « $-60\,000$ articles vendus », ce qui n'a aucun sens : des ventes ne sont jamais négatives.

Le stagiaire a utilisé le modèle **hors de son domaine de validité**. Le modèle a été construit pour la saison de vente, de février ($t = 2$) à octobre ($t = 10$). En dehors, la

parabole continue de descendre, alors que les ventes réelles restent simplement faibles ou nulles.

À retenir : un modèle mathématique décrit une situation sur un intervalle précis ; avant d'interpréter un résultat, on vérifie que la valeur de la variable appartient à cet intervalle et que le résultat est plausible.

Réponse. $V(12) = -60$ est absurde : le modèle n'est valable que pour $t \in [2 ; 10]$.

Correction de l'exercice 13 - Taux de variation d'un bénéfice

On calcule les images utiles : $B(10) = -5 \times (-25) = 125$, $B(20) = -15 \times (-15) = 225$, $B(30) = -25 \times (-5) = 125$.

a) Avec la formule du taux de variation :

$$\frac{B(20) - B(10)}{20 - 10} = \frac{225 - 125}{10} = 10 \quad \frac{B(30) - B(20)}{30 - 20} = \frac{125 - 225}{10} = -10$$

b) Entre 10 et 20 objets, chaque objet supplémentaire rapporte en moyenne 10 € de bénéfice en plus. Entre 20 et 30, chaque objet supplémentaire fait au contraire **perdre** 10 € en moyenne : produire davantage coûte plus que cela ne rapporte. Le changement de signe du taux de variation se produit au sommet, en $q = 20$, ce qui est cohérent avec un maximum.

Réponse. a) 10 et -10 — b) le bénéfice augmente jusqu'à 20 objets, puis diminue.

Correction de l'exercice 14 - Une remise qui attire des clients

a) Le prix devient $40 - x$ euros et le nombre d'abonnés $200 + 10x$. La recette est le produit des deux :

$$R(x) = (40 - x)(200 + 10x)$$

On met 10 en facteur dans la seconde parenthèse : $200 + 10x = 10(x + 20)$, donc $R(x) = 10(40 - x)(x + 20) = -10(x - 40)(x + 20)$.

b) Les racines sont 40 et -20, et l'axe de symétrie passe au milieu :

$$x = \frac{-20 + 40}{2} = 10$$

Comme $a = -10 < 0$, c'est un maximum. $R(10) = 30 \times 300 = 9000$ €, contre $R(0) = 40 \times 200 = 8000$ € sans remise. La meilleure stratégie est de baisser le prix de 10 €, à 30 € : le magasin gagne 1000 € de recette par mois.

Réponse. a) $R(x) = (40 - x)(200 + 10x)$ — b) une baisse de 10 €, recette de 9000 € au lieu de 8000 €.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un fabricant de vélos

a) La recette est $300q$, donc

$$B(q) = 300q - (5q^2 + 50q + 2000) = -5q^2 + 250q - 2000$$

Et $-5(q - 10)(q - 40) = -5(q^2 - 50q + 400) = -5q^2 + 250q - 2000$: les deux écritures sont égales.

b) Les racines sont 10 et 40, et $a = -5 < 0$: $B(q) \geq 0$ pour $q \in [10 ; 40]$. Le fabricant est rentable entre 10 et 40 vélos par mois.

c) L'axe de symétrie passe en $q = \frac{10 + 40}{2} = 25$, et c'est un maximum :

$$B(25) = -5 \times 15 \times (-15) = 1125 \text{ €}.$$

d) $B(20) = -5 \times 10 \times (-20) = 1000$ et $B(30) = -5 \times 20 \times (-10) = 1000$, donc le taux de

variation vaut $\frac{1000 - 1000}{10} = 0$. Les nombres 20 et 30 sont symétriques par rapport à l'axe $q = 25$: ils ont la même image, et la sécante est horizontale.

Réponse. b) de 10 à 40 vélos — c) 25 vélos, 1125 € — d) taux nul, car 20 et 30 sont symétriques par rapport à 25.