

Plaquette 1 – Paraboles : allure, images et taux de variation

Fonctions polynômes du second degré — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Trois écritures d'un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).

Écriture	Ce qu'elle montre
$f(x) = ax^2$	sommet à l'origine
$f(x) = ax^2 + c$	sommet $(0; c)$, axe : l'axe des ordonnées
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	racines x_1 et x_2

Allure. La courbe est une **parabole**, tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.

Taux de variation de f entre x_1 et x_2 :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

C'est le **coefficient directeur de la sécante** qui passe par les points d'abscisses x_1 et x_2 . S'il est positif, $f(x_2) > f(x_1)$; s'il est négatif, $f(x_2) < f(x_1)$.

Lecture graphique. Les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée k . Celles de $f(x) < k$ sont les abscisses des points situés **sous** la droite d'équation $y = k$.

Correction de l'exercice 1 – Vers le haut ou vers le bas ?

L'orientation dépend du **signe du coefficient** a de x^2 ; l'ordonnée à l'origine est l'image de 0.

a) $a = 2 > 0$: parabole tournée vers le haut. $f(0) = 2 \times 0^2 = 0$, la courbe passe par l'origine.

b) $a = -0,5 < 0$: parabole tournée vers le bas. $g(0) = 3$.

c) $a = 1 > 0$: vers le haut. $h(0) = 0 - 4 = -4$.

d) Ici, il faut repérer le coefficient devant le produit : $k(x) = -1 \times (x - 1)(x - 5)$, donc $a = -1 < 0$ et la parabole est tournée vers le bas. On calcule

$$k(0) = -(0 - 1)(0 - 5) = -(-1) \times (-5) = -5$$

La courbe coupe l'axe des ordonnées au point $(0; -5)$.

Réponse. a) haut, 0 — b) bas, 3 — c) haut, -4 — d) bas, -5.

Correction de l'exercice 2 – Calculer des images

On remplace x par chaque valeur, en calculant d'abord le carré. Attention : pour $x = -1$, on écrit des parenthèses, car $(-1)^2 = 1$.

$$f(0) = 3 \times 0^2 - 12 \times 0 + 5 = 5$$

$$f(2) = 3 \times 4 - 24 + 5 = 12 - 24 + 5 = -7.$$

$$f(-1) = 3 \times 1 - 12 \times (-1) + 5 = 3 + 12 + 5 = 20.$$

$$f(4) = 3 \times 16 - 48 + 5 = 48 - 48 + 5 = 5.$$

On remarque que $f(0) = f(4) = 5$: deux nombres différents ont la même image. C'est une propriété des paraboles, qui sont **symétriques** ; on l'exploitera pour trouver l'axe de symétrie, qui sera ici la droite d'équation $x = 2$, à mi-chemin entre 0 et 4.

Réponse. $f(0) = 5$, $f(2) = -7$, $f(-1) = 20$, $f(4) = 5$; 0 et 4 ont la même image.

Correction de l'exercice 3 - Associer courbes et expressions

On utilise deux indices : l'**orientation** (signe de a) et quelques **points faciles** à calculer.

- g a pour coefficient $a = -1 < 0$: c'est la seule parabole tournée vers le bas, donc g est représentée par C_3 . Contrôle : $g(0) = 4$, et C_3 passe bien par $(0; 4)$.
- f et h sont tournées vers le haut. On calcule leur image de 0 :

$$f(0) = 0 \quad h(0) = 0,5 \times (-1) \times (-5) = 2,5$$

C_2 passe par l'origine : c'est la courbe de f . Il reste C_1 pour h , ce que confirment ses racines 1 et 5, visibles là où C_1 coupe l'axe des abscisses.

Réponse. $f \rightarrow C_2$, $g \rightarrow C_3$, $h \rightarrow C_1$.

Correction de l'exercice 4 - Taux de variation et sécante

Le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est le coefficient directeur de la sécante passant par les points d'abscisses x_1 et x_2 :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

a) $f(1) = 1$ et $f(3) = 9$, donc le taux vaut $\frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$.

b) $f(-2) = 4$ et $f(0) = 0$, donc le taux vaut $\frac{0-4}{0-(-2)} = \frac{-4}{2} = -2$.

c) Le premier taux est positif : quand x passe de 1 à 3, $f(x)$ augmente, et la sécante « monte ». Le second est négatif : de -2 à 0, $f(x)$ diminue, et la sécante « descend ». C'est cohérent avec l'allure de la parabole, qui descend puis remonte.

Réponse. a) 4 — b) -2 — c) positif : f augmente ; négatif : f diminue.

Correction de l'exercice 5 - Coût d'une production supplémentaire

a) $C(10) = 0,5 \times 100 + 200 + 300 = 550$ € et $C(20) = 0,5 \times 400 + 400 + 300 = 900$ €.

b) On applique la formule du taux de variation :

$$\frac{C(20) - C(10)}{20 - 10} = \frac{900 - 550}{10} = \frac{350}{10} = 35$$

Interprétation : quand la production passe de 10 à 20 articles, le coût augmente de 35 € **par article supplémentaire**, en moyenne. Ce n'est pas le coût d'un article pris isolément : c'est le coût des dix articles ajoutés, divisé par dix. Il est supérieur aux 20 € du terme $20q$, car le terme $0,5q^2$ fait grimper le coût de plus en plus vite.

Réponse. a) 550 € et 900 € — b) 35 € par article supplémentaire, en moyenne.

Correction de l'exercice 6 - Taux de variation et sens de variation

a) On calcule les images utiles : $f(0) = 3$, $f(1) = -2 + 3 = 1$ et $f(3) = -2 \times 9 + 3 = -15$.

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 3}{1} = -2 \quad \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-15 - 1}{2} = -8$$

b) Un taux de variation négatif entre x_1 et x_2 , avec $x_1 < x_2$, signifie que $f(x_2) < f(x_1)$: l'image diminue quand x augmente. Si c'est vrai pour **tous** les couples de nombres de $[0; 4]$, la fonction f est **décroissante** sur $[0; 4]$.

On le voit aussi sur l'allure : $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas et son sommet est le point $(0; 3)$; à droite du sommet, elle descend. Les taux sont de plus en plus négatifs : la courbe descend de plus en plus vite.

Réponse. a) -2 et -8 — b) f est décroissante sur $[0; 4]$.

Correction de l'exercice 7 - Résoudre graphiquement une équation

a) Les solutions de $f(x) = k$ sont les **abscisses** des points de la courbe d'ordonnée k . On trace mentalement la droite horizontale $y = k$ et on lit où elle coupe la courbe.

— Pour $y = -3$, on lit deux points, d'abscisses 2 et 4.

— Pour $y = 5$, on lit deux points, d'abscisses 0 et 6.

b) On remplace dans l'expression :

$$f(2) = (2 - 1)(2 - 5) = 1 \times (-3) = -3 \quad f(4) = 3 \times (-1) = -3$$

$f(0) = (-1) \times (-5) = 5$ et $f(6) = 5 \times 1 = 5$. Les quatre lectures sont exactes. Une lecture graphique donne en général des valeurs approchées ; ici, elle tombe juste, et le calcul le prouve.

Réponse. a) $f(x) = -3 : x = 2$ ou $x = 4$; $f(x) = 5 : x = 0$ ou $x = 6$.

Correction de l'exercice 8 - Résoudre graphiquement une inéquation

Résoudre $f(x) < k$, c'est chercher les abscisses des points de la courbe situés **strictement sous** la droite $y = k$; pour $f(x) > k$, ceux situés **strictement au-dessus**.

a) La droite $y = 0$ est l'axe des abscisses. La courbe est en dessous entre ses deux points d'intersection avec cet axe, d'abscisses 1 et 5, qui sont exclus puisque l'inégalité est stricte :

$$S =]1; 5[$$

b) La courbe coupe la droite $y = 5$ aux points d'abscisses 0 et 6 (exercice précédent). Elle est au-dessus de cette droite à gauche de 0 et à droite de 6 :

$$S = [-1; 0[\cup]6; 7]$$

Les bornes -1 et 7 sont celles de l'intervalle d'étude imposé par l'énoncé.

Réponse. a) $]1; 5[$ — b) $[-1; 0[\cup]6; 7]$.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver une expression

a) Le point $A(0; 3)$ est sur la courbe, donc $f(0) = 3$. Or $f(0) = a \times 0^2 + c = c$, donc $c = 3$.

Le point $B(2; 11)$ est sur la courbe, donc $f(2) = 11$:

$$a \times 2^2 + 3 = 11 \Leftrightarrow 4a = 8 \Leftrightarrow a = 2$$

Ainsi $f(x) = 2x^2 + 3$. Contrôle : $f(2) = 2 \times 4 + 3 = 11$.

b) $a = 2 > 0$: la parabole est tournée vers le haut. Son sommet est le point $A(0; 3)$, puisqu'une fonction de la forme $ax^2 + c$ a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

Réponse. a) $c = 3$ et $a = 2$, soit $f(x) = 2x^2 + 3$ — b) vers le haut.

Correction de l'exercice 10 - La recette d'un spectacle

a) On remplace p dans l'expression factorisée :

$$R(10) = -4 \times 10 \times (10 - 50) = -40 \times (-40) = 1600$$

$$R(25) = -100 \times (-25) = 2500 \text{ € et } R(40) = -160 \times (-10) = 1600 \text{ €}.$$

b) Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $R(p) = 0$ pour $p = 0$ ou $p = 50$. À 0 €, les billets sont gratuits ; à 50 €, plus personne n'en achète. Dans les deux cas la recette est nulle.

c) $R(10) = R(40)$: les prix 10 € et 40 € rapportent autant, et 25 € est à mi-chemin de 10 et 40, comme de 0 et 50. La parabole est tournée vers le bas ($a = -4$) et symétrique : on conjecture que la recette est maximale pour $p = 25$ €, où elle vaut 2500 €.

Réponse. a) 1600 €, 2500 €, 1600 € — b) $p = 0$ ou $p = 50$ — c) maximum conjecturé en $p = 25$ €.

Correction de l'exercice 11 - Un enclos contre un mur

a) Le grillage couvre deux largeurs et une longueur : $2x + \text{longueur} = 40$, donc la longueur vaut $40 - 2x$. L'aire d'un rectangle est le produit de ses dimensions :

$$A(x) = x(40 - 2x)$$

On peut l'écrire sous forme factorisée : $A(x) = -2x(x - 20)$, avec x entre 0 et 20 pour que les longueurs soient positives.

$$b) A(5) = 5 \times 30 = 150 \text{ m}^2, A(10) = 10 \times 20 = 200 \text{ m}^2, A(15) = 15 \times 10 = 150 \text{ m}^2.$$

$A(5) = A(15)$: deux enclos différents, l'un étroit et long, l'autre large et court, ont la même aire. Le cas $x = 10$, à mi-chemin, donne la plus grande des trois aires calculées.

Réponse. a) longueur $40 - 2x$, $A(x) = x(40 - 2x)$ — b) $150 \text{ m}^2, 200 \text{ m}^2, 150 \text{ m}^2$.

Correction de l'exercice 12 - Vitesse moyenne d'une voiture qui accélère

$$a) d(1) = 2 \times 1 = 2 \text{ m et } d(3) = 2 \times 9 = 18 \text{ m}.$$

b) La vitesse moyenne entre deux instants est la distance parcourue divisée par la durée : c'est exactement le **taux de variation** de d .

$$\frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{18 - 2}{2} = 8 \text{ m/s}$$

$$\text{Entre 3 et 5 s : } d(5) = 50 \text{ m, donc } \frac{50 - 18}{2} = 16 \text{ m/s}.$$

La vitesse moyenne double d'un intervalle à l'autre : la voiture accélère, ce que traduit une distance en t^2 et non en t . Pour une vitesse constante, la distance serait une fonction affine du temps et le taux de variation serait toujours le même.

Réponse. a) 2 m et 18 m — b) 8 m/s, puis 16 m/s.

Correction de l'exercice 13 - Repérer la symétrie dans un tableau

$$a) f(0) = 0 - 0 + 8 = 8 \text{ et } f(4) = 16 - 24 + 8 = 0 : \text{ les valeurs du tableau sont correctes.}$$

$$b) \text{ Les images se répètent de part et d'autre de } x = 3 : f(2) = f(4) = 0, f(1) = f(5) = 3, f(0) = f(6) = 8. \text{ Deux nombres situés à la même distance de 3 ont la même image.}$$

On conjecture que la parabole est **symétrique par rapport à la droite d'équation** $x = 3$, et que son sommet est le point $(3; -1)$, le plus bas du tableau. C'est cohérent avec $a = 1 > 0$: la parabole est tournée vers le haut, son sommet est un minimum.

On remarque aussi que 2 et 4 sont les **racines** de f ; l'axe de symétrie passe à mi-chemin, en $\frac{2+4}{2} = 3$.

Réponse. b) axe de symétrie conjecturé $x = 3$; sommet $(3; -1)$, minimum.

Correction de l'exercice 14 - Vrai ou faux

a) **Vrai** : le coefficient de x^2 est $-3 < 0$.

b) **Vrai** : $g(0) = 2 \times 1 \times (-3) = -6$.

c) **Vrai** : $h(-3) = h(3) = 9$, donc

$$\frac{h(3) - h(-3)}{3 - (-3)} = \frac{0}{6} = 0$$

La sécante est horizontale. Un taux nul ne veut pas dire que la fonction est constante : h descend puis remonte entre -3 et 3 .

d) **Faux** : $k(x) = -x^2 + 5$, le coefficient de x^2 est $-1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas. L'ordre d'écriture des termes ne change pas le coefficient de x^2 .

Réponse. a) vrai — b) vrai — c) vrai — d) faux.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un modèle de bénéfice

a) On développe d'abord le produit des deux parenthèses, puis on multiplie par -5 :

$$(q - 20)(q - 40) = q^2 - 60q + 800 \quad \text{donc} \quad B(q) = -5q^2 + 300q - 4000$$

b) Avec la forme factorisée, les calculs sont rapides :

- $B(10) = -5 \times (-10) \times (-30) = -1500$;
- $B(20) = 0$ et $B(40) = 0$, car un facteur est nul ;
- $B(30) = -5 \times 10 \times (-10) = 500$;
- $B(50) = -5 \times 30 \times 10 = -1500$.

c) Le coefficient de q^2 est $-5 < 0$: la parabole est tournée vers le bas. Le bénéfice est nul pour 20 et 40 centaines d'objets, positif entre les deux (par exemple 50 000 € pour $q = 30$), négatif en dehors : produire trop peu ne couvre pas les frais fixes, produire trop fait chuter le prix ou exploser les coûts. Les valeurs symétriques $B(10) = B(50)$ suggèrent un axe de symétrie en $q = 30$.

Réponse. a) $B(q) = -5q^2 + 300q - 4000$ — b) -1500 ; 0 ; 500 ; 0 ; -1500 — c) parabole vers le bas, bénéfice positif entre 20 et 40.