

Plaquette 3 - Racines et forme factorisée

Fonctions polynômes du second degré — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Racines d'une forme factorisée. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2$$

△ Le facteur $x + 3$ s'annule en -3 : on change le signe.

Vérifier qu'un nombre est racine. r est racine de f lorsque $f(r) = 0$: on remplace et on calcule.

Factoriser dans les cas simples.

Situation	Factorisation
facteur commun x	$ax^2 + bx = x(ax + b)$
identité remarquable	$x^2 - k^2 = (x - k)(x + k)$
racine r connue de $x^2 + bx + c$	$(x - r)(x - s)$, avec $r \times s = c$

Balayage. Si f change de signe entre deux valeurs, une racine se trouve entre elles. On resserre l'encadrement avec un pas de plus en plus petit.

Contrôle. On développe la forme factorisée trouvée : on doit retrouver l'expression de départ.

Correction de l'exercice 1 - Lire des racines

On utilise la règle du produit nul : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Le coefficient devant les parenthèses n'est jamais nul, il ne donne pas de racine.

a) $x - 2 = 0$ ou $x + 5 = 0$, donc $x = 2$ ou $x = -5$.

b) $x + 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$, donc $x = -1$ ou $x = 4$.

c) $h(x) = 2 \times x \times (x - 3)$: le facteur x s'annule en 0, le facteur $x - 3$ en 3. Les racines sont 0 et 3.

d) $(x + 6)^2 = (x + 6)(x + 6)$: les deux facteurs sont égaux, et s'annulent tous deux en -6 . La fonction k n'a qu'une racine, -6 ; sa parabole touche l'axe des abscisses en un seul point, qui est son sommet.

Réponse. a) 2 et -5 — b) -1 et 4 — c) 0 et 3 — d) -6 seulement.

Correction de l'exercice 2 - Vérifier qu'un nombre est racine

Un nombre r est racine de f lorsque $f(r) = 0$. On remplace :

$$f(1) = 1 - 5 + 6 = 2 \quad f(2) = 4 - 10 + 6 = 0 \quad f(3) = 9 - 15 + 6 = 0$$

a) 1 n'est pas racine, car $f(1) \neq 0$; 2 et 3 sont des racines.

b) Un polynôme de degré 2 de racines 2 et 3, dont le coefficient de x^2 vaut 1, s'écrit $f(x) = (x - 2)(x - 3)$.

Contrôle en développant : $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$. On retrouve bien l'expression de départ.

Réponse. a) 2 et 3 sont racines, 1 non — b) $f(x) = (x - 2)(x - 3)$.

Correction de l'exercice 3 - Équations produit nul

Règle du produit nul :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

a) $2x - 6 = 0$ donne $x = 3$; $x + 1 = 0$ donne $x = -1$. Les solutions sont 3 et -1 .

b) $x = 0$ ou $5 - x = 0$, c'est-à-dire $x = 5$. Les solutions sont 0 et 5.

c) Le facteur -4 n'est jamais nul. $x - 0,5 = 0$ donne $x = 0,5$; $3x + 9 = 0$ donne $x = -3$. Les solutions sont 0,5 et -3 .

Contrôle sur un exemple : pour $x = -3$, $3x + 9 = -9 + 9 = 0$, donc le produit est bien nul.

Réponse. a) 3 et -1 — b) 0 et 5 — c) 0,5 et -3 .

Correction de l'exercice 4 - Mettre x en facteur

Quand le polynôme n'a pas de terme constant, x est un **facteur commun** :

$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$

a) $f(x) = x(x - 7)$. Racines : 0 et 7.

b) On peut aussi mettre 3 en facteur : $g(x) = 3x(x + 4)$. Racines : 0 et -4 .

c) $h(x) = -2x(x - 5)$. Racines : 0 et 5.

Contrôle de c) en développant : $-2x \times x + (-2x) \times (-5) = -2x^2 + 10x$. On remarque que 0 est toujours racine d'un tel polynôme, puisque $f(0) = 0$ quand il n'y a pas de terme constant.

Réponse. a) $x(x - 7)$: 0 et 7 — b) $3x(x + 4)$: 0 et -4 — c) $-2x(x - 5)$: 0 et 5.

Correction de l'exercice 5 - Une identité remarquable

On reconnaît une différence de deux carrés :

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

a) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$. Les solutions de $f(x) = 0$ sont 3 et -3 .

b) $4x^2 = (2x)^2$ et $25 = 5^2$, donc $4x^2 - 25 = (2x - 5)(2x + 5)$. Les solutions sont $\frac{5}{2} = 2,5$ et $-2,5$.

c) On met d'abord 2 en facteur : $2x^2 - 32 = 2(x^2 - 16) = 2(x - 4)(x + 4)$. Les solutions sont 4 et -4 .

Dans chaque cas, les deux racines sont opposées : c'est normal, la fonction est de la forme $ax^2 + c$, dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Réponse. a) $(x - 3)(x + 3)$: ± 3 — b) $(2x - 5)(2x + 5)$: $\pm 2,5$ — c) $2(x - 4)(x + 4)$: ± 4 .

Correction de l'exercice 6 - Factoriser grâce à une racine connue

a) $f(3) = 9 - 3 - 6 = 0$: 3 est une racine.

b) On développe la forme cherchée :

$$(x - 3)(x + b) = x^2 + bx - 3x - 3b = x^2 + (b - 3)x - 3b$$

Pour retrouver $x^2 - x - 6$, il faut que les termes constants soient égaux : $-3b = -6$, donc $b = 2$. On contrôle le terme en x : $b - 3 = 2 - 3 = -1$, ce qui convient.

Ainsi $f(x) = (x - 3)(x + 2)$.

c) Les racines sont 3 et -2 . Contrôle : $f(-2) = 4 + 2 - 6 = 0$.

Réponse. b) $b = 2$, $f(x) = (x - 3)(x + 2)$ — c) racines 3 et -2 .

Correction de l'exercice 7 - Contrôler une factorisation

a) On développe d'abord le produit des parenthèses, puis on multiplie par 2 :

$$(x - 1)(x - 4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4$$

$2(x^2 - 5x + 4) = 2x^2 - 10x + 8$: l'égalité est vraie.

b) On remplace dans la forme développée, ce qui donne une vérification indépendante :

— pour $x = 1$: $2 - 10 + 8 = 0$;

— pour $x = 4$: $2 \times 16 - 40 + 8 = 32 - 40 + 8 = 0$.

Les deux nombres sont bien des racines. Contrôler sur la forme développée évite de « vérifier » une forme factorisée avec elle-même.

Réponse. a) l'égalité est vraie — b) $f(1) = 0$ et $f(4) = 0$.

Correction de l'exercice 8 - Des racines lues sur un graphique

a) La courbe coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 3 : ce sont les racines.

b) On a donc $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$. Le point $A(0 ; 3)$ est sur la courbe, donc $f(0) = 3$:

$$a(0 + 1)(0 - 3) = 3 \Leftrightarrow -3a = 3 \Leftrightarrow a = -1$$

Ainsi $f(x) = -(x + 1)(x - 3)$. Le signe de a est cohérent : la parabole est tournée vers le bas.

c) Le sommet se lit en $(1 ; 4)$, au milieu des racines. Par le calcul, $f(1) = -(2) \times (-2) = 4$: la lecture est confirmée.

Réponse. a) -1 et 3 — b) $a = -1$, $f(x) = -(x + 1)(x - 3)$ — c) $f(1) = 4$.

Correction de l'exercice 9 - Trouver le coefficient a

Les racines étant 1 et 5, la fonction s'écrit $f(x) = a(x - 1)(x - 5)$. Le point $(3 ; -8)$ est sur la courbe, donc $f(3) = -8$:

$$a(3 - 1)(3 - 5) = -8 \Leftrightarrow -4a = -8 \Leftrightarrow a = 2$$

Ainsi $f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$.

L'axe de symétrie passe au milieu des racines, en $x = \frac{1 + 5}{2} = 3$: le point $(3 ; -8)$ donné dans l'énoncé est donc le **sommet**. Comme $a = 2 > 0$, c'est un minimum.

Réponse. $f(x) = 2(x - 1)(x - 5)$; sommet $(3 ; -8)$, minimum.

Correction de l'exercice 10 - Chercher une racine évidente

a) On teste des valeurs simples :

$$f(1) = 1 + 4 - 5 = 0 \quad f(-1) = 1 - 4 - 5 = -8 \quad f(2) = 4 + 8 - 5 = 7$$

1 est une racine.

b) On cherche $f(x) = (x - 1)(x - s)$. En développant, le terme constant vaut $1 \times s = s$; il

doit être égal à -5 , donc $s = -5$ et $f(x) = (x - 1)(x + 5)$.

Contrôle : $(x - 1)(x + 5) = x^2 + 5x - x - 5 = x^2 + 4x - 5$. L'autre racine est -5 :
 $f(-5) = 25 - 20 - 5 = 0$.

On pouvait aussi le prévoir : le produit des deux racines est égal au terme constant, -5 , et l'une d'elles vaut 1 .

Réponse. a) 1 est racine — b) $f(x) = (x - 1)(x + 5)$, autre racine -5 .

Correction de l'exercice 11 - Le seuil de rentabilité

a) On développe la forme proposée :

$$-5(q - 20)(q - 40) = -5(q^2 - 60q + 800) = -5q^2 + 300q - 4000$$

On retrouve $B(q)$.

b) Avec la forme factorisée, l'équation $B(q) = 0$ se résout immédiatement : $q - 20 = 0$ ou $q - 40 = 0$, donc $q = 20$ ou $q = 40$.

Le bénéfice est nul pour 2000 et pour 4000 objets : ce sont les deux **seuils de rentabilité**. Avec la forme développée, il aurait fallu deviner ces racines ; la forme factorisée les donne directement.

Réponse. b) $q = 20$ ou $q = 40$: bénéfice nul pour 2000 et 4000 objets.

Correction de l'exercice 12 - Une équation à ramener à zéro

On ne peut pas utiliser la règle du produit nul tant que le second membre n'est pas nul. On ramène tout dans le premier membre :

$$x^2 - 6x + 5 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

On cherche une racine évidente de $x^2 - 6x + 8$: pour $x = 2$, $4 - 12 + 8 = 0$. Le produit des racines vaut 8 , donc l'autre racine est 4 , et

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

Contrôle : $(x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8$. Les solutions de l'équation sont 2 et 4 .

Vérification dans l'équation de départ : $4 - 12 + 5 = -3$ et $16 - 24 + 5 = -3$.

Réponse. $x = 2$ ou $x = 4$.

Correction de l'exercice 13 - Encadrer une racine par balayage

a) $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 2 > 0$: f change de signe entre 1 et 2 , donc la racine positive est comprise entre 1 et 2 .

b) On calcule les images de proche en proche (c'est le **balayage**, facile à programmer) :

$$f(1,4) = 1,96 - 2 = -0,04 \quad f(1,5) = 2,25 - 2 = 0,25$$

La racine est entre $1,4$ et $1,5$. Avec le pas $0,01$: $f(1,41) = 1,9881 - 2 = -0,0119$ et $f(1,42) = 2,0164 - 2 = 0,0164$.

La racine est donc comprise entre $1,41$ et $1,42$; c'est $\sqrt{2} \approx 1,414$. Le balayage remplace un calcul exact quand aucune racine n'est évidente.

Réponse. a) racine entre 1 et 2 — b) entre $1,4$ et $1,5$, puis entre $1,41$ et $1,42$.

Correction de l'exercice 14 - Repérer une erreur de signe

L'erreur. L'élève a recopié les nombres des parenthèses en gardant leur signe. Or le facteur $x + 3$ s'annule quand $x = -3$, et le facteur $x - 4$ quand $x = 4$:

$$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \quad x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Les racines sont -3 et 4 .

Contrôle. $f(-3) = 2 \times 0 \times (-7) = 0$, alors que $f(3) = 2 \times 6 \times (-1) = -12 \neq 0$: 3 n'est pas une racine. Remplacer dans l'expression suffit toujours à détecter ce type d'erreur.

Réponse. Les racines sont -3 et 4 .

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : les dimensions d'un jardin

a) L'aire est le produit de la longueur $x + 4$ par la largeur x :

$$x(x + 4) = 60 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 60 = 0$$

b) Pour $x = 6$: $36 + 24 - 60 = 0$, donc 6 est une racine. On cherche $(x - 6)(x - s)$: le produit des racines est égal au terme constant, $6s = -60$, donc $s = -10$.

$$x^2 + 4x - 60 = (x - 6)(x + 10)$$

Contrôle : $(x - 6)(x + 10) = x^2 + 10x - 6x - 60 = x^2 + 4x - 60$.

c) Les solutions de l'équation sont 6 et -10 . Une largeur est positive, donc $x = 6$: le jardin mesure 6 m sur 10 m. Contrôle : $6 \times 10 = 60 \text{ m}^2$.

Réponse. b) $(x - 6)(x + 10)$ — c) 6 m sur 10 m.