

Plaquette 4 – Signe d’une forme factorisée et inéquations

Fonctions polynômes du second degré — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Signe d’un facteur du premier degré. $x - r$ est négatif pour $x < r$, nul en r , positif pour $x > r$.

Tableau de signes de $a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $x_1 < x_2$: on multiplie les signes ligne par ligne.

x		x_1		x_2	
signe de $(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	–	0	+

À retenir. Le polynôme est du **signe de a à l’extérieur** des racines, du **signe contraire entre** les racines.

Résoudre une inéquation.

1. Tout ramener dans un membre : $f(x) \leq k \Leftrightarrow f(x) - k \leq 0$. 2. Factoriser. 3. Dresser le tableau de signes et lire les intervalles.

$$(x - 1)(x - 7) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1 ; 7]$$

△ Inégalité large ($\leq, \geq$) : racines **incluses** ; stricte ($<, >$) : racines **exclues**. Diviser par un nombre négatif **change le sens** de l’inégalité.

Correction de l’exercice 1 – Un premier tableau de signes

On étudie le signe de chaque facteur. $x - 2$ s’annule en 2, il est négatif avant et positif après ; $x - 6$ s’annule en 6, même raisonnement. On multiplie ensuite les signes, colonne par colonne :

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$x - 2$		–	0	+		+	
$x - 6$		–		–	0	+	
$f(x)$		+	0	–	0	+	

$f(x)$ est positif sur $] - \infty ; 2[$ et sur $]6 ; +\infty[$, négatif sur $]2 ; 6[$, nul en 2 et en 6.

Contrôle avec une valeur de chaque zone : $f(0) = 12 > 0$, $f(4) = 2 \times (-2) = -4 < 0$, $f(8) = 6 \times 2 = 12 > 0$.

Réponse. Positif sur $] - \infty ; 2[\cup]6 ; +\infty[$, négatif sur $]2 ; 6[$.

Correction de l’exercice 2 – Avec un coefficient négatif

Le produit $(x + 1)(x - 4)$ a pour racines -1 et 4 ; il est positif à l’extérieur et négatif entre les racines. On le multiplie ensuite par -3 , qui est négatif : **tous les signes s’inversent**.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$(x + 1)(x - 4)$		+	0	–	0	+	
$g(x)$		–	0	+	0	–	

$g(x)$ est positif entre les racines, sur $] -1 ; 4[$, et négatif à l'extérieur. On retrouve la règle : le polynôme est du signe de $a = -3$ à l'extérieur des racines.

Contrôle : $g(0) = -3 \times 1 \times (-4) = 12 > 0$ et $g(5) = -3 \times 6 \times 1 = -18 < 0$.

Réponse. $g(x) > 0$ sur $] -1 ; 4[$, $g(x) < 0$ sur $] -\infty ; -1[\cup] 4 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 3 – Quand x est un facteur

Les facteurs x et $x - 5$ s'annulent en 0 et en 5. Le coefficient $a = 2$ est positif :

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x		–	0	+		+	
$x - 5$		–		–	0	+	
$h(x)$		+	0	–	0	+	

Le facteur 2 étant positif, il ne change aucun signe. $h(x)$ est négatif entre les racines :

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0 ; 5[$$

L'inégalité est stricte : 0 et 5, où $h(x) = 0$, sont exclus.

Réponse. $h(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0 ; 5[$.

Correction de l'exercice 4 – Factoriser avant d'étudier le signe

L'expression n'est pas factorisée. On reconnaît une différence de deux carrés :

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

Les racines sont -4 et 4 , et $a = 1 > 0$: $f(x)$ est positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

L'inégalité est large, donc les racines sont incluses :

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -4] \cup [4 ; +\infty[$$

Contrôle : $f(0) = -16 < 0$, et 0 n'est pas dans l'ensemble trouvé.

Réponse. $f(x) \geq 0$ sur $] -\infty ; -4] \cup [4 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 5 – Une inéquation large

Le premier membre est déjà factorisé, de racines 1 et 7, avec $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$x - 1$		–	0	+		+	
$x - 7$		–		–	0	+	
produit		+	0	–	0	+	

Le produit est négatif ou nul entre les racines, bornes comprises :

$$S = [1 ; 7]$$

Contrôle avec une valeur intérieure, $x = 4$: $3 \times (-3) = -9 \leq 0$; avec une valeur extérieure, $x = 8$: $7 \times 1 = 7 > 0$.

Réponse. $S = [1 ; 7]$.

Correction de l'exercice 6 - Une inéquation stricte

Les racines sont 3 et -2 ; rangées dans l'ordre croissant : -2 puis 3. Le coefficient $a = -2$ est négatif, donc l'expression est négative à l'extérieur des racines et positive entre elles.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-2(x-3)(x+2)$		-	0	+	0	-	

On cherche où l'expression est **strictement** positive, racines exclues :

$$S =]-2; 3[$$

Contrôle : pour $x = 0$, $-2 \times (-3) \times 2 = 12 > 0$; pour $x = 4$, $-2 \times 1 \times 6 = -12 < 0$.

Réponse. $S =]-2; 3[$.

Correction de l'exercice 7 - Ramener à une forme factorisée

On ne divise surtout pas par x : on ne connaît pas son signe. On ramène tout dans le premier membre, puis on factorise :

$$x^2 < 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x(x-4) < 0$$

Les racines sont 0 et 4, et $a = 1 > 0$: $x(x-4)$ est négatif entre les racines.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x(x-4)$		+	0	-	0	+	

$$S =]0; 4[$$

Diviser par x aurait donné « $x < 4$ », qui contient à tort tous les nombres négatifs : pour $x = -1$, on aurait $1 < -4$, ce qui est faux.

Réponse. $S =]0; 4[$.

Correction de l'exercice 8 - Une inéquation avec un second membre

On ramène à 0 :

$$x^2 - 6x + 5 \geq -3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

On factorise : 2 est une racine évidente ($4 - 12 + 8 = 0$) et le produit des racines vaut 8, donc l'autre racine est 4 :

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

Avec $a = 1 > 0$, le produit est positif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$(x-2)(x-4)$		+	0	-	0	+	

$$S =]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$$

Graphiquement : la parabole de $x^2 - 6x + 5$ est au-dessus de la droite $y = -3$ sauf entre 2 et 4.

Réponse. $S =]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$.

Correction de l'exercice 9 - La zone de rentabilité

L'entreprise est rentable quand son bénéfice est positif ou nul : on résout $B(q) \geq 0$ sur $[0; 60]$.

Les racines sont 20 et 40, et $a = -5 < 0$: $B(q)$ est négatif à l'extérieur des racines, positif entre elles.

q	0		20		40		60
$B(q)$		-	0	+	0	-	

$$B(q) \geq 0 \Leftrightarrow q \in [20; 40]$$

L'entreprise est rentable pour une production comprise entre 2000 et 4000 objets. En dessous, les ventes ne couvrent pas les frais ; au-dessus, les coûts de production augmentent plus vite que les recettes.

Réponse. Rentable pour $q \in [20; 40]$, soit entre 2000 et 4000 objets.

Correction de l'exercice 10 - Lire un signe sur un graphique

a) $f(x)$ est positif là où la courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses, négatif là où elle est en dessous. On lit que la courbe coupe l'axe en -2 et en 4 , et qu'elle est au-dessus entre ces deux valeurs.

b) Les racines sont -2 et 4 ; le coefficient $a = -0,5$ est négatif.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x + 2$		-	0	+		+	
$x - 4$		-		-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	

La ligne de $f(x)$ s'obtient en multipliant les deux signes, puis en les inversant à cause du facteur $-0,5$. On retrouve la lecture : $f(x) > 0$ sur $] -2; 4[$ et $f(x) < 0$ à l'extérieur.

Réponse. $f(x) > 0$ sur $] -2; 4[$, $f(x) < 0$ sur $] -\infty; -2[\cup] 4; +\infty[$.

Correction de l'exercice 11 - Respecter un coût maximal

On résout $C(x) \leq 200$, en ramenant à 0 :

$$x^2 - 40x + 500 \leq 200 \Leftrightarrow x^2 - 40x + 300 \leq 0$$

On cherche une racine évidente : pour $x = 10$, $100 - 400 + 300 = 0$. Le produit des racines vaut 300, donc l'autre est 30 :

$$x^2 - 40x + 300 = (x - 10)(x - 30)$$

Avec $a = 1 > 0$, ce produit est négatif ou nul entre les racines : $x \in [10; 30]$.

Le coût reste inférieur ou égal à 200 € pour une température comprise entre 100 et 300 degrés. Contrôle : $C(10) = 100 - 400 + 500 = 200$ et $C(20) = 100 \leq 200$.

Réponse. $x \in [10; 30]$, soit entre 100 et 300 degrés.

Correction de l'exercice 12 - Comparer deux fonctions

Comparer deux nombres revient à étudier le signe de leur différence :

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$$

On cherche une racine évidente de $x^2 - 2x - 3$: pour $x = -1$, $1 + 2 - 3 = 0$. Le produit des racines vaut -3 , donc l'autre est 3 , et $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$(x + 1)(x - 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) < g(x)$ pour $x \in]-1 ; 3[$. Graphiquement, la parabole est sous la droite entre les points d'abscisses -1 et 3 , où elles se coupent. Contrôle : $f(0) = 0 < g(0) = 3$.

Réponse. $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1 ; 3[$.

Correction de l'exercice 13 - Le signe sur un intervalle d'étude

Les racines 1 et 3 sont dans l'intervalle $[0 ; 5]$. Le tableau commence à 0 et s'arrête à 5 , et non à l'infini :

x	0		1		3		5
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur $[0 ; 5]$:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0 ; 1[\cup]3 ; 5]$$

Les bornes 0 et 5 sont incluses, car elles appartiennent à l'intervalle d'étude et $f(0) = 3 > 0$, $f(5) = 8 > 0$; les racines sont exclues, car l'inégalité est stricte.

Réponse. $f(x) > 0$ sur $[0 ; 1[\cup]3 ; 5]$.

Correction de l'exercice 14 - Une recette d'au moins 1600 euros

On résout $R(p) \geq 1600$. On développe et on ramène à 0 :

$$-4p^2 + 200p \geq 1600 \Leftrightarrow -4p^2 + 200p - 1600 \geq 0$$

On divise par -4 , qui est **négatif** : le sens de l'inégalité change.

$$p^2 - 50p + 400 \leq 0$$

On cherche une racine : pour $p = 10$, $100 - 500 + 400 = 0$. Le produit des racines vaut 400 , donc l'autre est 40 : $p^2 - 50p + 400 = (p - 10)(p - 40)$. Ce produit est négatif ou nul entre les racines.

La recette atteint au moins 1600 € pour un prix compris entre 10 € et 40 €. Contrôle : $R(10) = R(40) = 1600$ et $R(25) = 2500 \geq 1600$.

Réponse. $p \in [10 ; 40]$: entre 10 € et 40 €.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : rentabilité d'une production

a) La recette est $R(q) = 90q$ et le bénéfice est la recette moins le coût :

$$B(q) = 90q - (q^2 + 10q + 1200) = -q^2 + 80q - 1200$$

b) $(q - 20)(q - 60) = q^2 - 80q + 1200$, donc $-(q - 20)(q - 60) = -q^2 + 80q - 1200 = B(q)$.

c) Les racines sont 20 et 60 , et $a = -1 < 0$: $B(q)$ est positif entre les racines. L'entreprise est rentable pour q compris entre 20 et 60 articles.

Le sommet est sur l'axe de symétrie, au milieu des racines, en $q = \frac{20 + 60}{2} = 40$. Comme

$a < 0$, c'est un maximum : $B(40) = -(20) \times (-20) = 400$ €. Le bénéfice maximal est de 400 €, pour 40 articles.

Réponse. c) rentable pour $q \in [20 ; 60]$; bénéfice maximal de 400 € pour 40 articles.