MATHÉMATIQUES

Fonctions polynômes du second degré

Première STMG

Fonction • Taux de variation • Sécante • Parabole • Axe de symétrie
Sommet • Racines • Forme
factorisée • Signe • Résolution graphique • Balayage

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe de première** (arrêté du 26 février 2026, BO du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Analyse », section « Fonctions de la variable réelle ». Il couvre :

- notations $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$; taux de variation entre deux valeurs, pente de la sécante ; fonctions monotones ;
- fonctions polynômes de degré 2 : allure, axe de symétrie, sommet, tableau de variations ;
- racines et signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée ; factoriser connaissant une racine ;
- résolution graphique de $f(x) = k$, $f(x) < k$; **algorithme** : solution approchée par balayage.

Le calcul des racines à l'aide du discriminant n'est pas au programme de la voie technologique.

Objectif : modéliser par une fonction, interpréter un taux de variation, et étudier une fonction polynôme du second degré : allure, sommet, racines et signe.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Fonctions et taux de variation **3**

2 Fonctions polynômes du second degré **3**

3 Racines et signe **4**

4 Résolution graphique et balayage **4**

5 Erreurs classiques **5**

6 Fiche de synthèse **5**

7 Exercices d'application **5**

8 Corrigés des exercices **6**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Fonctions et taux de variation

Taux de variation

Le **taux de variation** d'une fonction f entre a et b ($a \neq b$) est

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

C'est la pente (coefficient directeur) de la **sécante** passant par les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ de la courbe.

Lien avec les variations

Si f est croissante sur un intervalle, tous ses taux de variation sur cet intervalle sont positifs ou nuls ; si elle est décroissante, ils sont négatifs ou nuls.

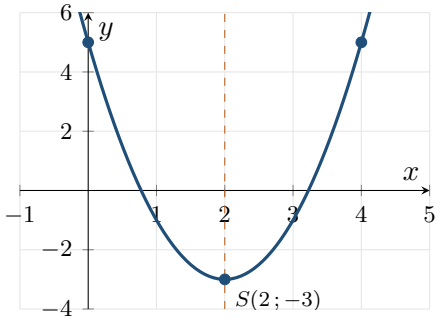
Un coût moyen supplémentaire

Le coût de production de q tonnes est $C(q) = 2q^2$ (en milliers d'euros). Entre $q = 1$ et $q = 3$: $\frac{C(3)-C(1)}{3-1} = \frac{18-2}{2} = 8$: chaque tonne supplémentaire coûte en moyenne 8 000 € sur cette plage.

2. Fonctions polynômes du second degré

Fonction du second degré

Une fonction du second degré s'écrit $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$. Sa courbe est une **parabole**, tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.



Parabole de $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$: axe de symétrie $x = 2$, sommet $S(2\,;-3)$.

Axe de symétrie et sommet

La parabole a un **axe de symétrie** vertical. Si deux points ont la même ordonnée, l'axe passe au milieu de leurs abscisses. Le **sommet** est sur l'axe : il donne le minimum de f si $a > 0$, le maximum si $a < 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Trouver l'axe en résolvant $f(x) = c$

$f(x) = c \iff ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$. L'axe passe au milieu : $x = -\frac{b}{2a}$.

$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$: $f(x) = 5 \iff 2x^2 - 8x = 0 \iff 2x(x-4) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 4$. L'axe est $x = 2$, et $f(2) = 8 - 16 + 5 = -3$: le minimum de f est -3.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-3	↗

3. Racines et signe

Forme factorisée

Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, les **racines** sont x_1 et x_2 (produit nul), l'axe de symétrie est $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, et $f(x)$ a le signe de a à l'extérieur des racines, le signe contraire entre elles.

$g(x) = -(x-1)(x-5)$: racines 1 et 5, axe $x = 3$, maximum $g(3) = -(2)(-2) = 4$. $a = -1 < 0$: $g(x) < 0$ pour $x < 1$ ou $x > 5$, $g(x) > 0$ entre 1 et 5.

Factoriser connaissant une racine

On vérifie que x_1 est racine ($f(x_1) = 0$), puis on cherche $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ en identifiant, ou à l'aide du produit des racines $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

$h(x) = 2x^2 - 2x - 12$: $h(3) = 18 - 6 - 12 = 0$, donc 3 est racine. $x_1 x_2 = \frac{-12}{2} = -6$, d'où $x_2 = -2$: $h(x) = 2(x-3)(x+2)$. Contrôle en développant : $2(x^2 - x - 6) = 2x^2 - 2x - 12$.

4. Résolution graphique et balayage

Lire les solutions

Les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite $y = k$; celles de $f(x) < k$, les abscisses des points de la courbe situés sous cette droite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Algorithme de balayage

On cherche une solution de $x^2 + x - 3 = 0$ entre 1 et 2 ($f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$) :

```
def balayage(pas):
    x = 1
    while (x + pas)**2 + (x + pas) - 3 < 0:
        x = x + pas
    return x, x + pas
```

Avec `pas = 0.01`, on obtient l'encadrement $1{,}30 < x < 1{,}31$.

5. Erreurs classiques

À éviter

- Inverser Δy et Δx dans le taux de variation.
- Oublier le coefficient a dans la forme factorisée.
- Se tromper de sens : $a < 0$ donne une parabole tournée vers le bas (un maximum).
- Chercher le discriminant : on utilise ici racines évidentes, factorisation et lecture graphique.

6. Fiche de synthèse

Taux de variation	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: pente de la sécante
Parabole	$ax^2 + bx + c$: vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$
Axe, sommet	$f(x) = c$ donne $x = 0$ et $x = -\frac{b}{a}$; axe $x = -\frac{b}{2a}$
Forme factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$: racines x_1, x_2 ; signe de a à l'extérieur
Graphique	$f(x) = k$: intersections avec $y = k$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Taux de variation

Soit $f(x) = x^2 - 4x$. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 4.

Exercice 2 – Sommet

Soit $g(x) = -x^2 + 6x - 5$. Résoudre $g(x) = -5$, en déduire l'axe de symétrie, puis le maximum de g.

Exercice 3 – Signe

Étudier le signe de $h(x) = 3(x + 1)(x - 4)$.

Exercice 4 – Optimisation

Le bénéfice d'une entreprise qui vend x centaines d'articles est $B(x) = -0{,}5x^2 + 4x$ (en milliers d'euros), pour $0 \leq x \leq 8$. Pour quelle production est-il maximal ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $f(1) = -3$ et $f(4) = 0$: $\dfrac{0-(-3)}{4-1} = 1$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $-x^2 + 6x = 0 \iff x(-x+6) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 6$. Axe $x = 3$; $a = -1 < 0$: maximum $g(3) = -9 + 18 - 5 = 4$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. Racines -1 et 4, $a = 3 > 0$: $h(x) > 0$ pour $x < -1$ ou $x > 4$, $h(x) < 0$ pour $-1 < x < 4$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $B(x) = x(-0{,}5x + 4)$ s'annule en 0 et 8 : l'axe est $x = 4$ et, comme $a < 0$, le bénéfice est maximal pour 400 articles : $B(4) = 8$, soit 8 000 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).