

Plaquette 1 - Paraboles, racines, signe et fonction inverse

Fonctions du second degré et inverse — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Une fonction du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa courbe est une **parabole** : tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$.
- **Sommet** de la parabole : abscisse

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et ordonnée} \quad \beta = f(\alpha)$$

Si $a > 0$, β est le **minimum** ; si $a < 0$, c'est le **maximum**.

- **Discriminant** : $\Delta = b^2 - 4ac$.
- $\Delta > 0$: deux racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- $\Delta = 0$: une racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$;
- $\Delta < 0$: aucune racine réelle.
- **Signe du trinôme** : du signe de a à l'extérieur des racines, du signe contraire entre les racines (et du signe de a partout si $\Delta \leq 0$).
- **Forme factorisée** (si $\Delta \geq 0$) : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- **Fonction inverse** $x \mapsto \frac{1}{x}$: définie pour $x \neq 0$, **décroissante** sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ (jamais sur $\mathbb{R}$ entier). Sa courbe est une hyperbole.
- Économie : bénéfice = recette - coût ; le seuil de rentabilité est atteint quand le bénéfice devient positif.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître le sens de la parabole

Tout se lit sur le signe du coefficient a de x^2 .

- $a = 3 > 0$: parabole tournée vers le **haut**, la fonction admet un **minimum**.
- $a = -2 < 0$: parabole tournée vers le **bas**, la fonction admet un **maximum**.
- $a = 1 > 0$: parabole vers le haut, **minimum** (atteint en 0, il vaut -9).

Réponse. a) haut, minimum · b) bas, maximum · c) haut, minimum.

Correction de l'exercice 2 - Coordonnées du sommet

On applique la formule du cours $\alpha = \frac{-b}{2a}$.

- Ici $a = 2$, $b = -12$, $c = 5$.
- $\alpha = \frac{12}{4} = 3$.
- $\beta = f(3) = 2 \times 9 - 36 + 5 = 18 - 36 + 5 = -13$.
- Le sommet est le point $S(3 ; -13)$.
- Comme $a = 2 > 0$, c'est un **minimum** : $f(x) \geq -13$ pour tout réel x .

Réponse. $S(3 ; -13)$, minimum.

Correction de l'exercice 3 - Tableau de variations

- $a = -1, b = 6 : \alpha = \frac{-6}{-2} = 3.$
- $\beta = g(3) = -9 + 18 - 5 = 4.$
- Comme $a < 0$, la fonction **croît puis décroît**, avec un maximum de 4 en $x = 3$.

Intervalle	$] -\infty ; 3]$	$[3 ; +\infty[$
Variations de g	croissante	décroissante
Valeurs	de $-\infty$ à 4	de 4 à $-\infty$

- Contrôle : $g(0) = -5$ et $g(6) = -36 + 36 - 5 = -5$: deux valeurs égales symétriques par rapport à $x = 3$. Cohérent.

Réponse. Maximum 4 en $x = 3$: croissante puis décroissante.

Correction de l'exercice 4 - Calculer un discriminant et les racines

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 1, b = -7, c = 12$.

- $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1 > 0$: deux racines.
- $\sqrt{\Delta} = 1.$

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4$$

- Vérification : $3 \times 4 = 12$ et $3 + 4 = 7$. Cohérent avec l'équation.

Réponse. $S = \{3; 4\}.$

Correction de l'exercice 5 - Les trois cas de discriminant

- $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$: **aucune racine** réelle.
- $\Delta = 36 - 36 = 0$: une **racine double**, $x_0 = \frac{6}{2} = 3$. On reconnaît d'ailleurs $(x - 3)^2$.
- $\Delta = 16 - 4 \times (-3) \times 1 = 16 + 12 = 28 > 0$: **deux racines** distinctes, $x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{-6}$, soit $x_1 \approx -0,215$ et $x_2 \approx 1,549$.

Réponse. a) aucune · b) une (double, $x = 3$) · c) deux ($\approx -0,215$ et $\approx 1,549$).

Correction de l'exercice 6 - Signe d'un trinôme

- $\Delta = 25 - 24 = 1, \sqrt{\Delta} = 1.$
- Racines : $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$
- Règle du cours : le trinôme est du signe de a ($a = 1 > 0$, donc positif) à l'**extérieur** des racines, et du signe contraire **entre** elles.

Intervalle	$] -\infty ; 2[$	$]2 ; 3[$	$]3 ; +\infty[$
Signe de $f(x)$	+	-	+

- Contrôle : $f(0) = 6 > 0, f(2,5) = 6,25 - 12,5 + 6 = -0,25 < 0, f(4) = 16 - 20 + 6 = 2 > 0$. Cohérent.

Réponse. Racines 2 et 3 ; $f > 0$ hors de $[2; 3], f < 0$ entre 2 et 3.

Correction de l'exercice 7 - Inéquation du second degré

- $\Delta = 16 - 4 \times (-1) \times 5 = 16 + 20 = 36, \sqrt{\Delta} = 6.$
- Racines : $x = \frac{-4 \pm 6}{-2}$, donc $x_1 = \frac{2}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-10}{-2} = 5.$
- Ici $a = -1 < 0$: le trinôme est **négatif à l'extérieur** des racines et **positif entre** elles.
- L'inégalité ≥ 0 est donc vérifiée sur $[-1 ; 5]$ (bornes incluses car le trinôme y est nul).
- Contrôle : pour $x = 0, 5 \geq 0$ vrai ; pour $x = 6, -36 + 24 + 5 = -7 < 0$. Cohérent.

Réponse. $S = [-1 ; 5]$.

Correction de l'exercice 8 - Fonction inverse : calculs et variations

a) $f(4) = \frac{1}{4} = 0,25 ;$

— $f(0,5) = \frac{1}{0,5} = 2 ;$

— $f(-2) = -0,5.$

b) La fonction inverse est **décroissante** sur $] -\infty ; 0[$ et **décroissante** sur $]0 ; +\infty[$. Elle n'est pas définie en 0.

c) 3 et 7 sont tous deux dans $]0 ; +\infty[$, où f décroît : comme $3 < 7$, on a $f(3) > f(7)$.

— Contrôle : $\frac{1}{3} \approx 0,333$ et $\frac{1}{7} \approx 0,143$. Cohérent.

Piège. On ne peut pas dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ globalement :

$f(-1) = -1 < f(1) = 1$ alors que $-1 < 1$.

Réponse. a) 0,25 ; 2 ; -0,5 · b) décroissante sur chacun des deux intervalles · c) $f(3) > f(7)$.

Correction de l'exercice 9 - Problème : coût moyen et fonction inverse

a) Coût total : $C(q) = 15q + 6\,000.$

— Coût moyen : $C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{15q + 6\,000}{q} = 15 + \frac{6\,000}{q}.$

b) $C_M(200) = 15 + \frac{6\,000}{200} = 15 + 30 = 45$ € par objet.

— $C_M(600) = 15 + \frac{6\,000}{600} = 15 + 10 = 25$ € par objet.

c) Le terme $\frac{6\,000}{q}$ est une fonction inverse : il **décroît** vers 0 quand q augmente.

— Le coût moyen se rapproche donc de 15 € sans jamais l'atteindre : c'est l'effet d'échelle, les frais fixes se répartissent sur davantage d'objets.

Réponse. a) $C(q) = 15q + 6\,000$ et $C_M(q) = 15 + \frac{6\,000}{q}$ · b) 45 € puis 25 € · c) il tend vers 15 €.

Correction de l'exercice 10 - Problème : bénéfice maximal

a) $a = -0,4 < 0$: la parabole est tournée vers le bas, le sommet donne le maximum.

— $\alpha = \frac{-12}{2 \times (-0,4)} = \frac{-12}{-0,8} = 15.$

— $B(15) = -0,4 \times 225 + 180 - 40 = -90 + 140 = 50.$

— Le bénéfice est maximal pour $q = 15$ centaines d'articles, soit 1 500 articles, et vaut 50 milliers d'euros, c'est-à-dire 50 000 €.

b) On résout $B(q) = 0 : \Delta = 12^2 - 4 \times (-0,4) \times (-40) = 144 - 64 = 80$.

— $\sqrt{80} \approx 8,944$.

— $q = \frac{-12 \pm 8,944}{-0,8}$, donc $q_1 = \frac{-3,056}{-0,8} \approx 3,82$ et $q_2 = \frac{-20,944}{-0,8} \approx 26,18$.

— $a < 0$: le bénéfice est **positif entre** les racines.

— L'entreprise est rentable pour q compris entre environ 3,82 et 26,18 centaines d'articles, soit entre 382 et 2 618 articles environ.

Réponse. a) $q = 15$ (soit 1 500 articles), bénéfice 50 000 € · b) rentable pour $3,82 \leq q \leq 26,18$ (centaines).

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : de la forme développée à la factorisée

a) $a = 2, b = -2, c = -12$.

— $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-12) = 4 + 96 = 100, \sqrt{\Delta} = 10$.

— $x_1 = \frac{2-10}{4} = -2$ et $x_2 = \frac{2+10}{4} = 3$.

b) Formule du cours : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donc

$$f(x) = 2(x + 2)(x - 3)$$

— Contrôle en développant : $2(x^2 - x - 6) = 2x^2 - 2x - 12$. Correct.

c) $a = 2 > 0$: le trinôme est négatif **entre** les racines.

— Donc $f(x) < 0$ pour $x \in] - 2 ; 3[$.

Réponse. a) $\Delta = 100$, racines -2 et 3 · b) $f(x) = 2(x + 2)(x - 3)$ · c) $S =] - 2 ; 3[$.