Plaquette 3 – Arbres et expériences à deux étapes

Probabilités et variables aléatoires — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux règles de l'arbre.

Situation	Opération
suivre un chemin	**multiplier** les probabilités rencontrées
réunir plusieurs chemins	**additionner** leurs probabilités

Contrôle indispensable. À chaque nœud, la somme des branches vaut 1. La somme de **tous** les chemins vaut 1 aussi.

Avec ou sans remise.

Tirage	Deuxième étape
avec remise	mêmes probabilités qu'au premier tirage
sans remise	le total diminue de 1, la couleur tirée aussi

« **Au moins un** ». Presque toujours par le contraire :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun})$$

Formule des probabilités totales. Si une production vient de deux sites A et B :

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$$

où $P_A(D)$ se lit sur la branche partant de A.

Indépendance. Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

⚠ Ne jamais **additionner** les probabilités d'un même chemin : 0,6 puis 0,02 donnent 0,012, pas 0,62.

Correction de l'exercice 1 – Lire un chemin

On représente l'expérience par un arbre : premier niveau A ou $\overline{A}$, second niveau B ou $\overline{B}$.

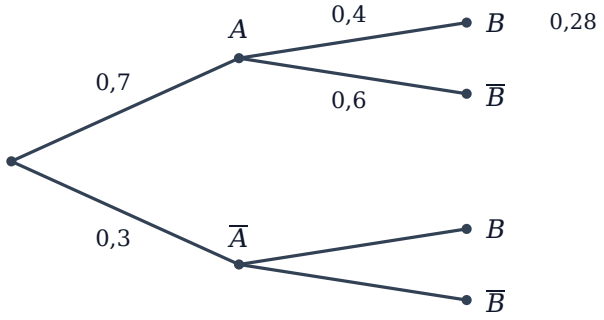
a) Les branches qui partent d'un même nœud ont pour somme 1. Depuis A, la branche vers B vaut 0,4, donc celle vers $\overline{B}$ vaut

$$1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

b) La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités rencontrées :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(A \text{ puis } B) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$$



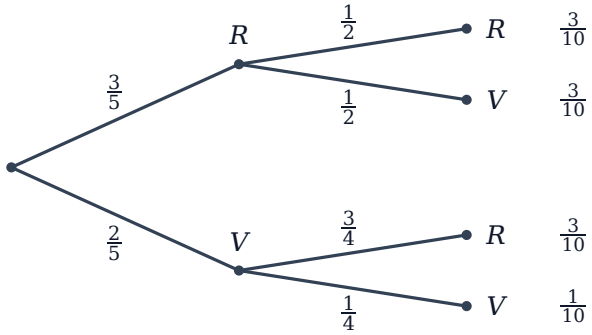
Le chemin « A puis B »

Sens. Sur 100 répétitions, A se produit environ 70 fois, et B suit dans 40 % de ces cas, soit 28 fois.

Réponse. a) 0,6 — b) 0,28.

Correction de l’exercice 2 – Deux tirages sans remise

Au premier tirage, l’urne contient 5 boules : $P(R) = \dfrac{3}{5}$ et $P(V) = \dfrac{2}{5}$. **Sans remise**, il n’en reste que 4 au second tirage, et leur couleur dépend du premier tirage.



Deux tirages sans remise (3 rouges, 2 vertes)

a) Chemin « rouge puis rouge » : après une rouge, il reste 2 rouges sur 4.

$$P(RR) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

b) Chemin « verte puis verte » : $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.

c) Une boule de chaque couleur : deux chemins, RV et VR, que l’on **additionne** :

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

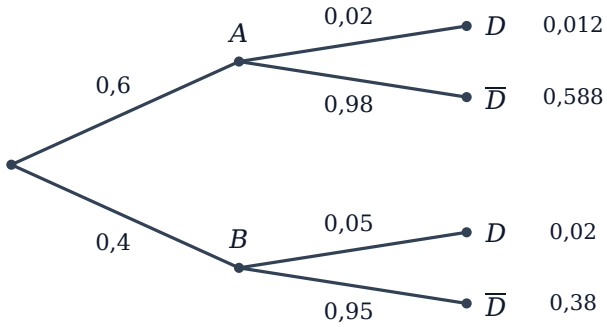
Contrôle. $\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{10} = 1$.

Réponse. a) $\dfrac{3}{10}$ — b) $\dfrac{1}{10}$ — c) $\dfrac{3}{5}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Deux usines

On note A, B les sites et D « la pièce est défectueuse ». Premier niveau : le site ; second niveau : le défaut **sachant** le site.



Site de production puis défaut

a) Chemin « A puis défectueuse » : on multiplie.

$$P(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$$

b) Une pièce défectueuse vient de A ou de B : deux chemins, que l’on additionne. C’est la **formule des probabilités totales**.

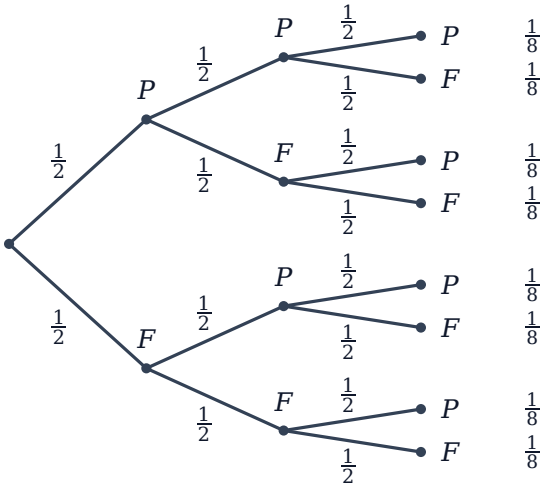
$$P(D) = 0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032$$

3,2 % des pièces sont défectueuses, un taux compris entre 2 % et 5 %.

Réponse. a) 0,012 — b) 0,032.

Correction de l’exercice 4 – Trois lancers de pièce

À chaque lancer, l’arbre se divise en deux branches de probabilité $\frac{1}{2}$.



Trois lancers : huit chemins

a) Il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ chemins.

b) Un seul chemin donne trois piles (PPP) :

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

c) Trois chemins donnent exactement deux piles : PPF, PFP et FPP. Chacun a pour

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

probabilité $\frac{1}{8}$; on additionne :

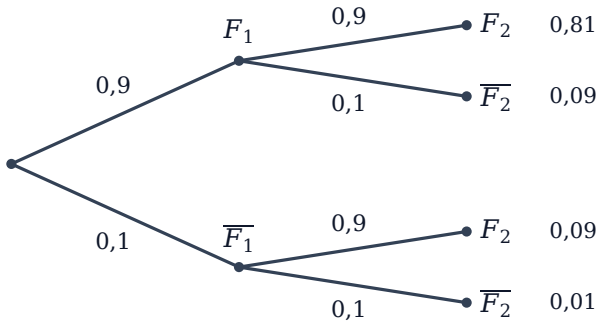
$$P = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Contrôle. Zéro pile ($\frac{1}{8}$), un pile ($\frac{3}{8}$), deux piles ($\frac{3}{8}$), trois piles ($\frac{1}{8}$) : la somme vaut 1.

Réponse. a) 8 chemins — b) $\frac{1}{8}$ — c) $\frac{3}{8}$.

Correction de l’exercice 5 – Deux machines en série

Chaque machine fonctionne avec la probabilité $1 - 0{,}1 = 0{,}9$, indépendamment de l’autre. L’arbre a donc les mêmes branches au second niveau, quel que soit le premier.



F_i : la machine i fonctionne

a) Les deux fonctionnent : chemin $F_1 \to F_2$.

$$P = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$$

b) « Au moins une tombe en panne » est le contraire de « les deux fonctionnent » :

$$P = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$$

c) Avec trois machines, les trois fonctionnent avec la probabilité $0{,}9^3 = 0{,}729$, et au moins une tombe en panne avec la probabilité $1 - 0{,}729 = 0{,}271$.

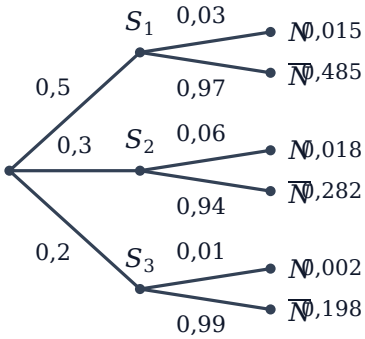
Lecture. Plus il y a de machines, plus le risque qu’au moins une tombe en panne augmente : de 10 % pour une machine à 27,1 % pour trois.

Réponse. a) 0,81 — b) 0,19 — c) 0,729 et 0,271.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Trois fournisseurs

On note N « le produit est non conforme ». L’arbre a trois branches au premier niveau (de somme $0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$).



Fournisseur puis non-conformité (N)

a) Chaque chemin vers N se calcule par un produit :

$$0{,}5 \times 0{,}03 = 0{,}015 \qquad 0{,}3 \times 0{,}06 = 0{,}018 \qquad 0{,}2 \times 0{,}01 = 0{,}002$$

b) On additionne les trois chemins :

$$P(N) = 0{,}015 + 0{,}018 + 0{,}002 = 0{,}035$$

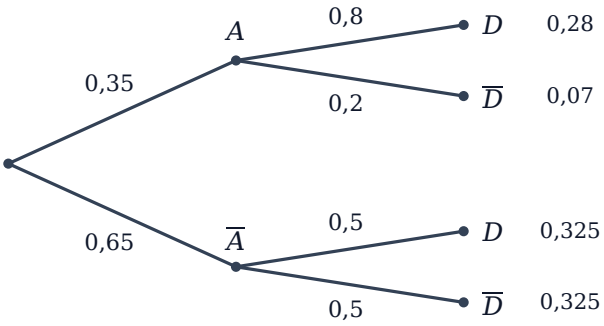
3,5 % des produits sont non conformes. Le fournisseur S_2, avec le taux le plus élevé, contribue le plus.

Réponse. a) 0,015 ; 0,018 ; 0,002 — b) 0,035.

Correction de l’exercice 7 – Compléter un arbre

a) À chaque nœud, les branches ont pour somme 1 :

— premier niveau : $1 - 0{,}35 = 0{,}65$ pour « non A » ;
— depuis A : $1 - 0{,}8 = 0{,}2$ pour « non D » ;
— depuis « non A » : $1 - 0{,}5 = 0{,}5$ pour « non D ».



L'arbre complété

b) Deux chemins mènent à D ; on multiplie le long de chacun, puis on additionne :

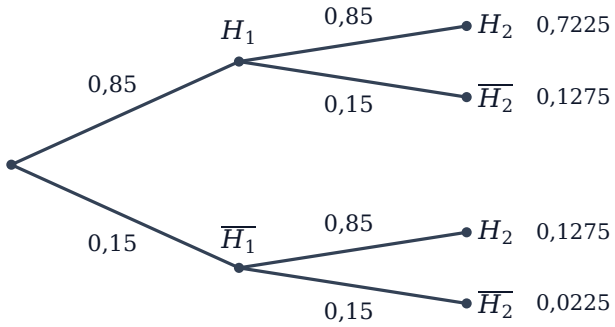
$$P(D) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}65 \times 0{,}5 = 0{,}28 + 0{,}325 = 0{,}605$$

Réponse. a) 0,65 ; 0,2 ; 0,5 — b) $P(D) = 0{,}605$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – Deux livraisons

Chaque livraison est à l’heure avec la probabilité 0,85, en retard avec la probabilité 0,15, indépendamment de l’autre.



H_i : la livraison i est à l'heure

a) Les deux à l’heure : $0{,}85 \times 0{,}85 = 0{,}7225$.

b) « Au moins une en retard » est le contraire de « les deux à l’heure » :

$$P = 1 - 0{,}7225 = 0{,}2775$$

c) Exactement une en retard : deux chemins (la première en retard, ou la seconde).

$$P = 0{,}85 \times 0{,}15 + 0{,}15 \times 0{,}85 = 0{,}1275 + 0{,}1275 = 0{,}255$$

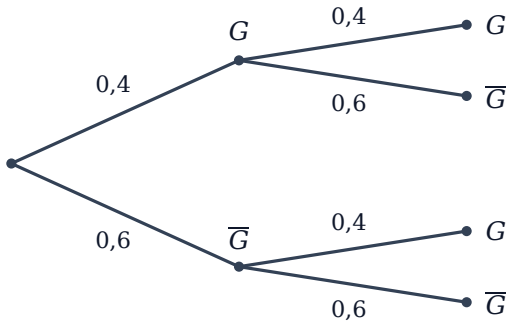
Contrôle. Les deux en retard : $0{,}15^2 = 0{,}0225$, et $0{,}255 + 0{,}0225 = 0{,}2775$: on retrouve b).

Réponse. a) 0,7225 — b) 0,2775 — c) 0,255.

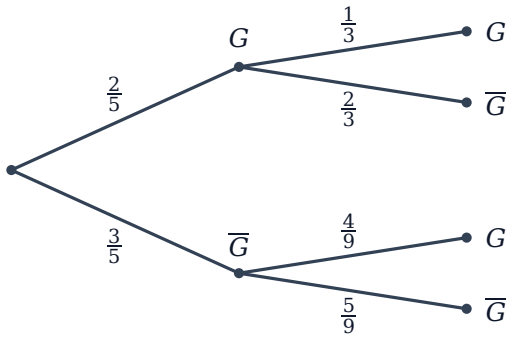
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Avec ou sans remise

On note G « tirer un jeton gagnant ». Au premier tirage, $P(G) = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.



Avec remise



Sans remise

a) **Avec remise**, l’urne est la même au second tirage :

$$P(GG) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$$

b) **Sans remise**, après un jeton gagnant il en reste 3 sur 9 :

$$P(GG) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \approx 0{,}133$$

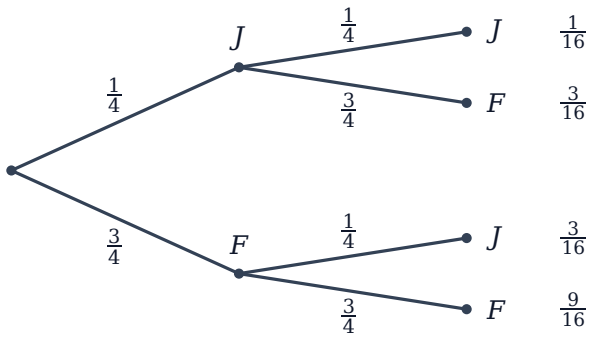
c) La probabilité est plus faible sans remise : le premier jeton gagnant tiré n’est plus disponible. Sur les arbres, les branches du second niveau sont identiques avec remise et différentes sans remise.

Réponse. a) 0,16 — b) $\dfrac{2}{15} \approx 0{,}133$ — c) plus faible sans remise.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – Un questionnaire au hasard

À chaque question, l’élève répond juste avec la probabilité $\frac{1}{4}$ (une bonne réponse sur quatre) et faux avec la probabilité $\frac{3}{4}$, indépendamment de l’autre question.



J : réponse juste, F : réponse fausse

a) Tout juste : $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

b) Tout faux : $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

c) Exactement une bonne réponse : deux chemins (JF et FJ).

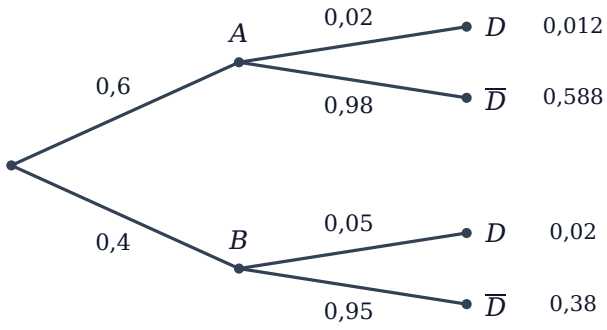
$$P = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Contrôle. $\frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{6}{16} = 1$. Répondre au hasard donne plus de chances de tout rater (56 %) que de tout réussir (6 %).

Réponse. a) $\frac{1}{16}$ — b) $\frac{9}{16}$ — c) $\frac{3}{8}$.

Correction de l’exercice 11 – Remonter dans l’arbre

On cherche, **parmi les pièces défectueuses**, la part de celles qui viennent de B. On compare le chemin « B puis défectueuse » à l’ensemble des chemins menant à une pièce défectueuse :



Les deux chemins menant à D

— chemin B puis D : $0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}02$;

— tous les chemins vers D : $P(D) = 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032$.

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}032} = 0{,}625$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Une pièce défectueuse vient de B dans 62,5 % des cas, alors que B ne produit que 40 % des pièces : son taux de défaut est plus élevé.

Réponse. 0,625.

Correction de l’exercice 12 – Repérer une erreur

L’erreur. L’élève a **additionné** les deux probabilités du chemin. Sur un arbre, on **multiplie** le long d’un chemin :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$$

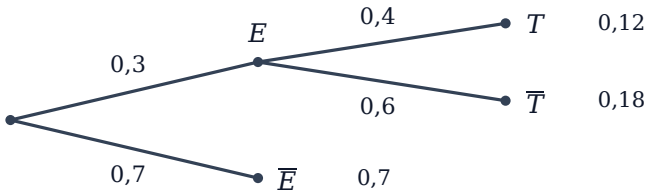
Pourquoi 0,62 **est impossible.** Les pièces de A défectueuses sont une partie des pièces de A : leur probabilité ne peut pas dépasser $P(A) = 0{,}6$.

Sens. 2 % des 60 % de pièces venant de A, c’est 1,2 % de l’ensemble des pièces : une proportion d’une proportion se calcule par un produit.

Réponse. $0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$, et non 0,62.

Correction de l’exercice 13 – Deux étapes de sélection

On note E « le candidat passe l’entretien » et T « il réussit le test technique ». Le test ne concerne que ceux qui ont passé l’entretien : la probabilité 0,4 est portée par la branche partant de E.



E : passe l'entretien, T : réussit le test

a) Franchir les deux étapes, c’est suivre le chemin $E \to T$:

$$P = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$$

b) Sur 250 candidats, on en attend $250 \times 0{,}12 = 30$ retenus.

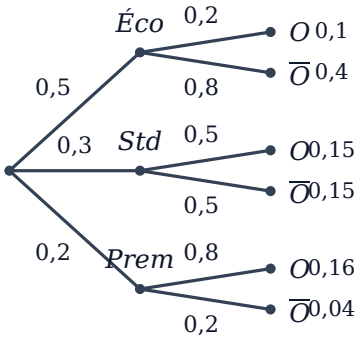
Vérification par les effectifs. 30 % de 250 font 75 candidats à l’entretien, dont 40 %, soit 30, réussissent le test.

Réponse. a) 0,12 — b) 30 candidats.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Un arbre à trois branches

On note O « le client prend l’option ». Le premier niveau a trois branches, de somme $0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$.



Formule choisie puis option (O)

a) Chemins avec option :

$$\text{Éco} : 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}1 \qquad \text{Standard} : 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15 \qquad \text{Premium} : 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$$

b) On additionne les trois chemins :

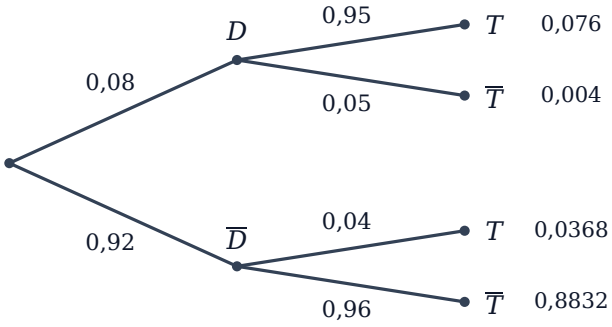
$$P(O) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}16 = 0{,}41$$

41 % des clients prennent l’option. Les clients Premium, bien que minoritaires, en sont les plus gros acheteurs.

Réponse. a) 0,1 ; 0,15 ; 0,16 — b) 0,41.

Correction de l’exercice 15 – Un dépistage

On note D « la pièce est défectueuse » et T « le test est positif ».



Pièce défectueuse ou non, puis test positif

a) Un test positif provient de deux chemins :

$$P(T) = 0{,}08 \times 0{,}95 + 0{,}92 \times 0{,}04 = 0{,}076 + 0{,}0368 = 0{,}1128$$

b) Parmi les tests positifs, la part de vrais défauts compare le chemin « défectueuse puis positif » à tous les tests positifs :

$$P_T(D) = \frac{0{,}076}{0{,}1128} \approx 0{,}674$$

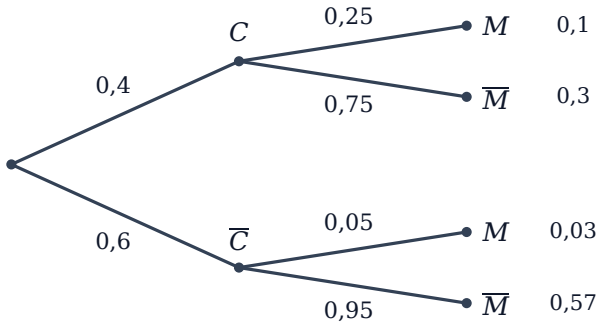
Environ 67 % des tests positifs correspondent à une vraie pièce défectueuse ; un tiers sont des fausses alertes, car les pièces correctes sont très nombreuses.

Réponse. a) 0,1128 — b) environ 67 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : un parcours client

On note C « le visiteur crée un compte » et M « il passe commande ».



Création de compte (C) puis commande (M)

a) Deux chemins mènent à une commande :

$$P(M) = 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}1 + 0{,}03 = 0{,}13$$

13 % des visiteurs commandent.

b) Sur 8000 visiteurs : $8000 \times 0{,}13 = 1040$ commandes.

c) Parmi les commandes, la part venant des comptes créés :

$$P_M(C) = \frac{0{,}1}{0{,}13} \approx 0{,}769$$

Environ 77 % des commandes viennent de visiteurs ayant créé un compte, alors qu’ils ne sont que 40 % des visiteurs : la création de compte est un bon indicateur d’achat.

Réponse. a) 0,13 — b) 1040 commandes — c) environ 77 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).