# Plaquette 5 – Décider avec l'espérance

## Probabilités et variables aléatoires — Première STMG

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**La méthode de décision.**

| Étape | Ce qu'on fait |
|---|---|
| 1 | lister les **scénarios** et leurs probabilités |
| 2 | chiffrer le **résultat** de chaque scénario |
| 3 | calculer $E(X)$ |
| 4 | comparer les options et **décider** |

**Résultat espéré.**

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

**Coût moyen d'un risque.**

$$\text{coût moyen} = \text{probabilité} \times \text{coût du sinistre}$$

Une prime ou un prix de garantie doit **dépasser** ce coût moyen pour laisser une marge.

**Seuil de rentabilité en probabilité.** Si un projet coûte $c$ et rapporte $g$ en cas de succès :

$$gp - c \geq 0 \iff p \geq \frac{c}{g}$$

**Espérance et risque.**

| Indicateur | Ce qu'il mesure |
|---|---|
| $E(X)$ | le résultat **moyen** à long terme |
| probabilité de perte | le risque d'un **mauvais** résultat |

⚠ Deux projets de même espérance peuvent avoir des risques très différents. Pour une décision unique, non répétée, le risque compte autant que l'espérance.

## Correction de l'exercice 1 – Choisir un projet

On compare les résultats moyens (espérances), en milliers d'euros :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2$$

a) Projet A : $E(A) = 50 \times 0{,}6 + (-20) \times 0{,}4 = 30 - 8 = 22$ k€. Projet B : $E(B) = 120 \times 0{,}3 + (-30) \times 0{,}7 = 36 - 21 = 15$ k€.

b) Le projet **A** a le meilleur résultat moyen (22 k€ contre 15 k€). Il est aussi moins risqué : il réussit 6 fois sur 10 et ne fait perdre que 20 k€ en cas d'échec, alors que B échoue 7 fois sur 10. On retient A.

**Réponse.** a) $E(A) = 22$ k€, $E(B) = 15$ k€ — b) le projet A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 2 – Lancer un produit ?

Le résultat vaut +200 k€ avec la probabilité 0,45, et −90 k€ avec la probabilité $1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

a) Calcul :

$$E(X) = 200 \times 0{,}45 + (-90) \times 0{,}55 = 90 - 49{,}5 = 40{,}5 \text{ k€}$$

b) L'espérance est **positive** : si l'entreprise prend souvent ce genre de décision, elle gagne en moyenne 40,5 k€ par lancement. Il est raisonnable de lancer le produit, à condition de pouvoir supporter une perte de 90 k€, qui arrive plus d'une fois sur deux.

**Réponse.** a) 40,5 k€ — b) oui, l'espérance est positive (mais l'échec est plus probable que le succès).

## Correction de l'exercice 3 – Quel stock commander ?

On chiffre le résultat dans chacun des deux scénarios de demande, puis on fait la moyenne pondérée.

— **Demande forte** (0,6) : les 100 articles sont vendus, résultat $100 \times 8 = 800$ €.
— **Demande faible** (0,4) : 60 articles vendus ($60 \times 8 = 480$ €) et 40 invendus soldés à perte ($40 \times 3 = 120$ €), résultat $480 - 120 = 360$ €.

$$E(X) = 800 \times 0{,}6 + 360 \times 0{,}4 = 480 + 144 = 624 \text{ €}$$

Le résultat espéré de la commande de 100 articles est de 624 €.

**Réponse.** 624 €.

## Correction de l'exercice 4 – Une garantie étendue

Le magasin encaisse 45 € et paie une réparation de 350 € avec la probabilité 0,1. Son résultat par garantie vaut 45 € (probabilité 0,9) ou $45 - 350 = -305$ € (probabilité 0,1).

a) Calcul :

$$E(X) = 45 \times 0{,}9 + (-305) \times 0{,}1 = 40{,}5 - 30{,}5 = 10 \text{ €}$$

On retrouve le calcul direct : prix moins coût moyen du risque, $45 - 350 \times 0{,}1 = 10$ €.

b) Sur 2000 garanties : $2000 \times 10 = 20\,000$ € de résultat attendu.

**Réponse.** a) 10 € — b) 20 000 €.

## Correction de l'exercice 5 – Le coût d'une loterie

Le coût moyen d'un ticket est la somme des coûts moyens de chaque lot (probabilité × montant) :

a) Calcul :

$$E(\text{coût}) = 20\,000 \times \frac{1}{5000} + 100 \times \frac{1}{200} = 4 + 0{,}5 = 4{,}5 \text{ €}$$

b) Pour 10 000 tickets, on prévoit un budget moyen de $10\,000 \times 4{,}5 = 45\,000$ €.

**Prudence.** C'est un coût **moyen** : le nombre réel de gros lots peut varier (on en attend 2, mais il peut y en avoir 1 ou 4). L'enseigne doit prévoir une marge de sécurité.

**Réponse.** a) 4,50 € par ticket — b) 45 000 €.

## Correction de l'exercice 6 – Espérance égale, risques différents

a) Le placement A rapporte 6 % à coup sûr. Pour B :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$E(B) = 26 \times 0{,}5 + (-14) \times 0{,}5 = 13 - 7 = 6\,\%$$

Les deux placements ont la **même espérance**, 6 %.

b) Ils ne présentent pas le même risque : avec B, on perd 14 % une fois sur deux. Un épargnant qui ne peut pas supporter de perte (épargne de précaution, projet à court terme) doit choisir **A**. B ne se justifie que pour quelqu'un qui accepte le risque, et il n'apporte ici aucun gain moyen supplémentaire pour ce risque : A est le meilleur conseil.

**Réponse.** a) même espérance, 6 % — b) A, car B ajoute du risque sans gain moyen supplémentaire.

## Correction de l'exercice 7 – Une prime d'assurance

a) Le coût moyen du risque est le produit du coût du sinistre par sa probabilité :

$$12\,000 \times 0{,}05 = 600\ €$$

b) La prime doit couvrir le coût moyen du risque et les frais de gestion : prime minimale = 600 + 60 = 660 €.

c) Pour une marge de 100 € par contrat : 660 + 100 = 760 €.

**Vérification.** Avec 760 €, le résultat moyen de l'assureur est 760 − 60 − 600 = 100 € par contrat.

**Réponse.** a) 600 € — b) 660 € — c) 760 €.

## Correction de l'exercice 8 – Payer pour réduire un risque

On compare le coût moyen total dans les deux cas.

— **Sans intérimaires** : coût moyen de la pénalité $5000 \times 0{,}12 = 600$ €.
— **Avec intérimaires** : 400 € certains, plus la pénalité moyenne $5000 \times 0{,}03 = 150$ €, soit 550 €.

$$550 < 600$$

Il faut **embaucher** : on économise en moyenne 50 € par chantier, et surtout on divise par quatre le risque de payer 5000 € de pénalité.

**Réponse.** Oui : 550 € de coût moyen contre 600 €.

## Correction de l'exercice 9 – Trois scénarios

a) Moyenne pondérée des trois résultats (en k€) :

$$E(X) = 300 \times 0{,}25 + 120 \times 0{,}5 + (-80) \times 0{,}25 = 75 + 60 - 20 = 115\ \text{k€}$$

b) On perd de l'argent seulement dans le scénario pessimiste : $P(X < 0) = 0{,}25$.

c) L'investissement est rentable en moyenne (115 k€), avec une perte possible dans un cas sur quatre. Si l'entreprise peut supporter une perte de 80 k€, l'investissement est intéressant.

**Réponse.** a) 115 k€ — b) 0,25 — c) rentable en moyenne, avec un risque de perte d'un sur quatre.

## Correction de l'exercice 10 – Choisir un fournisseur

Le coût réel d'une pièce est son prix plus le coût moyen des défauts :

$$\text{coût moyen} = \text{prix} + 30 \times P(\text{défaut})$$

— Fournisseur A : $12 + 30 \times 0{,}04 = 12 + 1{,}2 = 13{,}20$ € ;
— fournisseur B : $11 + 30 \times 0{,}09 = 11 + 2{,}7 = 13{,}70$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le fournisseur **A** est le moins cher en réalité, bien que son prix affiché soit plus élevé : les défauts de B coûtent plus que l'euro économisé.

**Réponse.** A (13,20 € par pièce contre 13,70 €).

## Correction de l'exercice 11 – Un seuil de probabilité

a) Le projet coûte 50 k€ dans tous les cas et rapporte 200 k€ avec la probabilité $p$ :

$$E(X) = 200p - 50 \text{ (en k€)}$$

b) Le projet est rentable en moyenne quand $E(X) \geq 0$ :

$$200p - 50 \geq 0 \Leftrightarrow p \geq \frac{50}{200} = 0{,}25$$

Il faut au moins une chance sur quatre de succès.

**Vérification.** Avec $p = 0{,}25$ : $200 \times 0{,}25 - 50 = 0$.

**Réponse.** a) $E(X) = 200p - 50$ — b) $p \geq 0{,}25$.

## Correction de l'exercice 12 – Repérer une erreur

**L'erreur.** Le gérant ne retient que le meilleur scénario, comme s'il était certain. Or il n'arrive qu'une fois sur quatre.

**Le bon calcul.** Le montant à prévoir en moyenne est l'espérance :

$$E(X) = 300 \times 0{,}25 + 120 \times 0{,}5 + (-80) \times 0{,}25 = 115 \text{ k€}$$

**Conséquence.** Inscrire 300 k€ surestimerait le résultat de 185 k€ ; et une prévision prudente envisagerait même le scénario pessimiste (−80 k€).

**Réponse.** On inscrit l'espérance, 115 k€, et non 300 k€.

## Correction de l'exercice 13 – Deux campagnes publicitaires

a) Résultat espéré = marge espérée moins coût (en k€) :

— campagne A : $60 \times 0{,}5 - 20 = 30 - 20 = 10$ k€ ;
— campagne B : $30 \times 0{,}4 - 8 = 12 - 8 = 4$ k€.

b) Rapport gain espéré sur coût :

$$\text{A} : \frac{30}{20} = 1{,}5 \qquad \text{B} : \frac{12}{8} = 1{,}5$$

Chaque euro investi rapporte en moyenne 1,50 € dans les deux cas. A rapporte plus au total parce qu'elle est plus grosse ; si le budget est limité, B donne le même rendement pour une mise plus faible.

**Réponse.** a) A : 10 k€ ; B : 4 k€ — b) même rapport, 1,5.

## Correction de l'exercice 14 – Un lot de pièces

On compare le coût moyen sans contrôle au coût du contrôle.

— **Sans contrôle** : en moyenne $500 \times 0{,}03 = 15$ pièces défectueuses livrées, soit $15 \times 80 = 1200$ € de pénalités.
— **Avec contrôle** : 900 €, et plus aucune pénalité.

$$900 < 1200$$

Il faut **contrôler** : on économise en moyenne 300 € par lot.

**Réponse.** Oui : 900 € contre 1200 € de pénalités moyennes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 15 – Une offre commerciale

a) Sur chaque produit vendu, l'enseigne gagne sa marge de 25 € ; si l'équipe gagne (probabilité 0,15), elle rembourse en plus 80 €.

$$E(\text{marge}) = 25 - 80 \times 0{,}15 = 25 - 12 = 13 \text{ €}$$

b) On compare les marges totales espérées :

— sans l'opération : $4000 \times 25 = 100\,000$ € ;

— avec l'opération : $6000 \times 13 = 78\,000$ €.

L'opération **n'est pas rentable** en moyenne : la hausse des ventes ne compense pas le coût moyen des remboursements.

**Seuil.** Il faudrait vendre au moins $\dfrac{100\,000}{13} \approx 7693$ produits pour qu'elle le devienne.

**Réponse.** a) 13 € — b) non : 78 000 € contre 100 000 €.

## Correction de l'exercice 16 – Une fréquence surprenante ?

a) Bornes de l'intervalle :

$$p - 2s = 0{,}3 - 2 \times 0{,}046 = 0{,}208 \quad \text{et} \quad p + 2s = 0{,}3 + 0{,}092 = 0{,}392$$

Proportion : $\dfrac{480}{500} = 0{,}96$, soit 96 % des échantillons simulés.

b) La fréquence observée est $f = \dfrac{42}{100} = 0{,}42$. Elle s'écarte de $p$ de $0{,}42 - 0{,}3 = 0{,}12$, soit $\dfrac{0{,}12}{0{,}046} \approx 2{,}6$ fois $s$ : elle est en dehors de $[0{,}208\,;0{,}392]$.

Dans la simulation, seuls $500 - 480 = 20$ échantillons sur 500, soit 4 %, sont à plus de $2s$ de $p$ : la situation est **rare** dans le modèle. Soit l'institut a observé un échantillon exceptionnel, soit le taux de réponse a réellement augmenté. Un seul échantillon ne permet pas de trancher : il invite à surveiller les semaines suivantes.

c) Pour diviser $s$ par 2, il faut multiplier $\sqrt{n}$ par 2, donc multiplier $n$ par $2^2 = 4$ : des échantillons de $4 \times 100 = 400$ personnes.

**Réponse.** a) $[0{,}208\,;0{,}392]$, qui contient 96 % des échantillons — b) rare : $f = 0{,}42$ est à environ $2{,}6\,s$ de $p$ — c) $n = 400$.

## Correction de l'exercice 17 – Synthèse : ouvrir un point de vente

a) Résultat annuel espéré (en k€) :

$$E(X) = 90 \times 0{,}3 + 40 \times 0{,}45 + (-30) \times 0{,}25 = 27 + 18 - 7{,}5 = 37{,}5 \text{ k€}$$

b) À raison de 37,5 k€ par an en moyenne, l'investissement de 150 k€ est espéré remboursé en

$$\frac{150}{37{,}5} = 4 \text{ ans}$$

c) Une année est déficitaire dans le seul scénario −30 k€ : probabilité 0,25.

**Lecture.** Le remboursement en 4 ans est une moyenne : une succession d'années défavorables peut l'allonger nettement.

**Réponse.** a) 37,5 k€ — b) 4 ans — c) 0,25.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).