Plaquette 2 – Événements, tableaux et réunions

Probabilités et variables aléatoires — Première STMG

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équiprobabilité.

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues totales}}$$

Événement contraire.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Très utile pour « au moins un… » : on passe par « aucun ».

Réunion et intersection.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Vocabulaire	Sens
$A \cup B$	A **ou** B (au moins l'un des deux)
$A \cap B$	A **et** B en même temps
incompatibles	$A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$

⚠ Si on oublie de retrancher $P(A \cap B)$, on compte deux fois les issues communes.

Dans un tableau croisé. Chaque case donne directement un effectif d'intersection ; les marges donnent les événements simples.

Ce qu'on cherche	Où le lire
$P(A \cap B)$	la case croisée
$P(A)$	le total de la ligne
$P(B)$	le total de la colonne

Ordre de grandeur. Une probabilité est toujours entre 0 et 1. Un résultat négatif ou supérieur à 1 signale une erreur.

Correction de l'exercice 1 – Un dé équilibré

Le dé est équilibré : les 6 faces sont **équiprobables**, et l'on applique

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues totales}}$$

a) Une seule issue favorable : $P(4) = \frac{1}{6}$.

b) Les nombres pairs sont 2, 4 et 6, soit 3 issues : $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c) « Au moins 5 » signifie 5 ou 6, soit 2 issues : $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Contrôle. Chaque probabilité est comprise entre 0 et 1.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ — b) $\frac{1}{2}$ — c) $\frac{1}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Une urne

L'urne contient $5 + 3 + 2 = 10$ boules, toutes ayant la même chance d'être tirées : on divise le nombre de boules favorables par 10.

a) $P(\text{rouge}) = \dfrac{5}{10} = 0{,}5$.

b) Verte ou bleue : $3 + 2 = 5$ boules, donc $P = \dfrac{5}{10} = 0{,}5$.

c) « Ne pas avoir de rouge » est l'**événement contraire** de « avoir une rouge » :

$$P\left(\overline{R}\right) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

Remarque. b) et c) décrivent le même événement (une boule non rouge est verte ou bleue) : il est normal de trouver le même résultat.

Réponse. a) 0,5 — b) 0,5 — c) 0,5.

Correction de l'exercice 3 – Réunion de deux événements

a) Les issues communes à A et B sont comptées deux fois dans $P(A) + P(B)$; on les retire une fois :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45 + 0{,}38 - 0{,}12 = 0{,}71$$

b) Par l'événement contraire : $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

c) « Aucun des deux ne se réalise » est le contraire de « au moins l'un des deux se réalise », c'est-à-dire de $A \cup B$:

$$P = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}71 = 0{,}29$$

Réponse. a) 0,71 — b) 0,55 — c) 0,29.

Correction de l'exercice 4 – Événements incompatibles

a) Incompatibles signifie qu'ils ne peuvent pas se produire en même temps : $A \cap B = \varnothing$, donc $P(A \cap B) = 0$.

b) La formule de la réunion se simplifie :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0 = 0{,}25 + 0{,}4 = 0{,}65$$

c) Si C était incompatible avec A et avec B, les trois événements A, B, C ne pourraient jamais se produire deux à la fois, et l'on aurait

$$P(A \cup B \cup C) = 0{,}25 + 0{,}4 + 0{,}5 = 1{,}15$$

ce qui est impossible, une probabilité ne dépassant pas 1. Donc **non**, C ne peut pas être incompatible avec A et avec B à la fois.

Réponse. a) 0 — b) 0,65 — c) non (on aurait une probabilité de 1,15).

Correction de l'exercice 5 – Un jeu de 32 cartes

Les 32 cartes sont équiprobables : 4 couleurs de 8 cartes.

a) 8 cœurs : $P(C) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

b) 4 rois : $P(R) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.

c) « Cœur ou roi » : on ne doit pas compter deux fois le roi de cœur, qui est à la fois un cœur et un roi.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

Vérification par dénombrement. Les 8 cœurs et les 3 autres rois font 11 cartes.

d) Si l'on sait que la carte est un cœur, il reste 8 cartes possibles, dont un seul roi :

$$P_C(R) = \frac{1}{8}$$

C'est exactement $P(R)$: savoir que la carte est un cœur ne change pas la probabilité d'avoir un roi. Les événements C et R sont donc **indépendants**. Le produit le confirme : $P(C) \times P(R) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(C \cap R)$.

Réponse. a) $\frac{1}{4}$ — b) $\frac{1}{8}$ — c) $\frac{11}{32}$ — d) indépendants, car $P_C(R) = P(R) = \frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 6 – Probabilités dans un tableau croisé

On divise les effectifs par le total, 300.

a) $P(H) = \frac{120}{300} = 0{,}4$ (total de la ligne), $P(O) = \frac{186}{300} = 0{,}62$ (total de la colonne), $P(H \cap O) = \frac{84}{300} = 0{,}28$ (case croisée).

b) Formule de la réunion :

$$P(H \cup O) = 0{,}4 + 0{,}62 - 0{,}28 = 0{,}74$$

Vérification par les effectifs. Hommes ou réponse « oui » : $120 + 102 = 222$ personnes (les hommes, plus les femmes ayant répondu oui), et $\frac{222}{300} = 0{,}74$.

c) On se restreint aux 120 hommes, dont 84 ont répondu oui :

$$P_H(O) = \frac{84}{120} = 0{,}7$$

Or $P(O) = 0{,}62$. Comme $0{,}7 \neq 0{,}62$, savoir que la personne est un homme change la probabilité d'une réponse « oui » : H et O ne sont **pas indépendants**. Les hommes ont répondu oui plus souvent (70 %) que l'ensemble des personnes interrogées (62 %).

Réponse. a) 0,4 ; 0,62 ; 0,28 — b) 0,74 — c) $P_H(O) = 0{,}7 \neq P(O)$: non indépendants.

Correction de l'exercice 7 – Deux dés et la somme

a) Chaque dé a 6 faces : il y a $6 \times 6 = 36$ couples de résultats, tous équiprobables.

b) La somme vaut 7 pour les couples (1 ; 6), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 2), (6 ; 1) : 6 issues.

$$P(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) La somme vaut au moins 10 pour (4 ; 6), (5 ; 5), (6 ; 4) (somme 10), (5 ; 6), (6 ; 5) (somme 11) et (6 ; 6) (somme 12) : 6 issues.

$$P(S \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

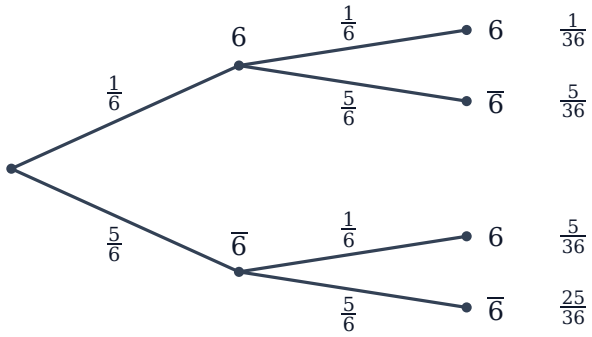
Piège. Les sommes 2 à 12 ne sont **pas** équiprobables : on compte les couples, pas les sommes.

Réponse. a) 36 — b) $\frac{1}{6}$ — c) $\frac{1}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – Au moins un six

« Au moins un 6 » regroupe plusieurs cas ; il est plus simple de passer par l’**événement contraire**, « aucun 6 », qui correspond à un seul chemin de l’arbre.



Deux lancers : un seul chemin sans aucun 6

À chaque lancer, la probabilité de ne pas faire 6 est $\frac{5}{6}$:

$$P(\text{aucun 6}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$P(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$$

Piège. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ est faux : on compterait deux fois le cas « 6 puis 6 ».

Réponse. $\frac{11}{36} \approx 0{,}306$.

Correction de l’exercice 9 – Compléter un tableau de probabilités

a) La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 :

$$P(c) = 1 - (0{,}18 + 0{,}27 + 0{,}22) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$$

b) La probabilité d’un événement est la somme des probabilités de ses issues :

$$P(\{a\,;c\}) = 0{,}18 + 0{,}33 = 0{,}51$$

c) Par l’événement contraire : $P(\text{ne pas obtenir } b) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$.

Contrôle. $0{,}18 + 0{,}33 + 0{,}22 = 0{,}73$: même résultat en additionnant les trois autres issues.

Réponse. a) 0,33 — b) 0,51 — c) 0,73.

Correction de l’exercice 10 – D’un sondage aux probabilités

On note V « posséder une voiture » et B « posséder un vélo » : $P(V) = 0{,}62$, $P(B) = 0{,}34$, $P(V \cap B) = 0{,}22$.

a) Au moins l’un des deux, c’est $V \cup B$:

$$P(V \cup B) = 0{,}62 + 0{,}34 - 0{,}22 = 0{,}74$$

b) Ni l’un ni l’autre : contraire de a), $1 - 0{,}74 = 0{,}26$.

c) Uniquement un vélo : posséder un vélo **sans** voiture. On retire de B ceux qui ont aussi une voiture :

$$P = 0{,}34 - 0{,}22 = 0{,}12$$

Contrôle. Voiture seule 0,40, vélo seul 0,12, les deux 0,22, aucun 0,26 : la somme vaut 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) 0,74 — b) 0,26 — c) 0,12.

Correction de l’exercice 11 – Une roue de loterie

Les 20 secteurs sont identiques, donc équiprobables.

a) Secteurs perdants : $20 - 2 - 6 = 12$.

b) Gagner quelque chose : $2 + 6 = 8$ secteurs, donc $P = \frac{8}{20} = 0{,}4$. On peut aussi passer par le contraire : $1 - \frac{12}{20} = 0{,}4$.

c) Gagner exactement 10 € : 6 secteurs, donc $P = \frac{6}{20} = 0{,}3$.

Réponse. a) 12 — b) 0,4 — c) 0,3.

Correction de l’exercice 12 – Fréquence et probabilité

a) La fréquence observée de « pile » est

$$f = \frac{528}{1000} = 0{,}528$$

b) Pour une pièce équilibrée, la probabilité de pile est $p = 0{,}5$. Sur 1000 lancers, la fréquence fluctue autour de 0,5. Avec l’intervalle de fluctuation vu en Seconde,

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{1000}} ; 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] \approx [0{,}468 ; 0{,}532]$$

la fréquence 0,528 est dans l’intervalle : l’écart à 0,5 s’explique par le hasard, on **n’a pas de raison** de conclure que la pièce est truquée.

Nuance. Cela ne prouve pas que la pièce est équilibrée ; cela signifie seulement que l’expérience ne permet pas de la déclarer truquée.

Réponse. a) 0,528 — b) non : $0{,}528 \in [0{,}468 ; 0{,}532]$, l’écart est compatible avec le hasard.

Correction de l’exercice 13 – Repérer une erreur

L’erreur. Une probabilité ne dépasse jamais 1 : 1,3 est impossible. L’élève a utilisé $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, formule valable seulement si A et B sont **incompatibles**.

La bonne formule.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Il faut connaître $P(A \cap B)$ pour conclure.

Ce qu’on peut affirmer. Comme $P(A \cup B) \leq 1$, on a $0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1$, donc $P(A \cap B) \geq 0{,}3$: A et B ne sont pas incompatibles, ils se produisent ensemble au moins 30 % du temps.

Réponse. $P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B)$, avec $P(A \cap B) \geq 0{,}3$; 1,3 est impossible.

Correction de l’exercice 14 – Effectifs et probabilités

On note C « être en CDI » et T « travailler à temps partiel ».

a) On divise les effectifs par 400 :

$$P(C) = \frac{240}{400} = 0{,}6 \qquad P(T) = \frac{160}{400} = 0{,}4 \qquad P(C \cap T) = \frac{96}{400} = 0{,}24$$

b) Formule de la réunion :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(C \cup T) = 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}24 = 0{,}76$$

c) En CDI à temps plein : en CDI **et pas** à temps partiel. On retire de C ceux qui sont aussi à temps partiel :

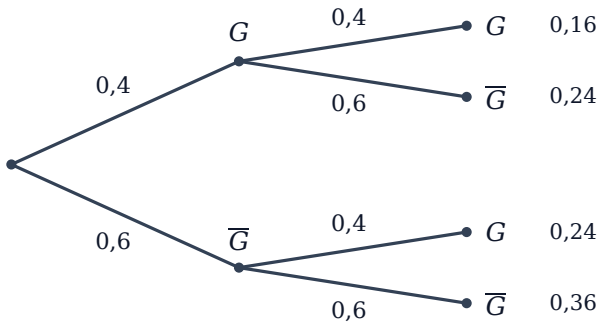
$$P = 0{,}6 - 0{,}24 = 0{,}36$$

soit 144 salariés sur 400.

Réponse. a) 0,6 ; 0,4 ; 0,24 — b) 0,76 — c) 0,36.

Correction de l’exercice 15 – Deux tirages successifs

On note G « le jeton est gagnant ». À chaque tirage, $P(G) = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$; comme on **remet** le jeton, le second tirage se fait dans la même urne.



Tirages avec remise : mêmes branches au second tirage

a) Gagner deux fois : $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.

b) Perdre deux fois : $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

c) Gagner exactement une fois : deux chemins (G puis $\overline{G}$, ou $\overline{G}$ puis G).

$$P = 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}48$$

Contrôle. $0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}48 = 1$.

Réponse. a) 0,16 — b) 0,36 — c) 0,48.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : une enquête complète

On note L « a acheté en ligne » et M « a acheté en magasin » : 300 clients dans L, 260 dans M, 120 dans les deux.

a) En ligne uniquement : $300 - 120 = 180$; en magasin uniquement : $260 - 120 = 140$. Par un seul canal : $180 + 140 = 320$ clients.

b) Par au moins un canal : $300 + 260 - 120 = 440$ clients (les 120 ne sont comptés qu’une fois). Par aucun : $500 - 440 = 60$ clients.

c) En ligne uniquement :

$$P = \frac{180}{500} = 0{,}36$$

Contrôle. $180 + 140 + 120 + 60 = 500$: les quatre groupes couvrent bien tous les clients.

Réponse. a) 320 — b) 60 — c) 0,36.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).